

102年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員
考試、102年公務人員特種考試法務部調查局調查人員
考試、102年公務人員特種考試國家安全局國家安全情
報人員考試、102年公務人員特種考試民航人員考試、
102年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix}$ ，有 A^{-1} 存在，則 a 的限制為何？(10 分)

二、試求積分 $\int_C \frac{z^2}{z^6 + 1} dz$ ，其中 C 為逆時針方向沿著積分路徑 $|z| = 2$ 的上半圓。(15 分)

三、請用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求此微分方程式之解 $y'' - 3y' + 2y = f(t)$,

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

四、一隨機變數 X 的機率密度函數 (density function) 為： $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，試求：

(一)累積分布函數 $F(x)$ (5 分)

(二)平均值 $E(X)$ (5 分)

(三)變異數 $\text{Var}(X)$ (5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6508

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設關係式 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$ 成立，試求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ？

(A) $\frac{9}{8} \frac{4z^2 - 9x^2}{z^3}$

(B) $\frac{9}{16} \frac{4z^2 - 9x^2}{z^3}$

(C) $\frac{9}{32} \frac{4z^2 - 9x^2}{z^3}$

(D) $\frac{9}{64} \frac{4z^2 - 9x^2}{z^3}$

2 令 $\mathbf{u} = [1, 2, -4]$, $\mathbf{v} = [2, 1, 1]$ 為兩個三維向量，則下列計算何者為錯誤？

(A) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

(B) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [6, -9, -3]$

(C) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

(D) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = 0$

3 一曲線的位置向量為 $F(t) = \cos(t) \mathbf{i} + \sin(t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $-\pi \leq t \leq \pi$ ，則此曲線長度為何？

(A) $2\sqrt{2}\pi$

(B) $3\sqrt{2}\pi$

(C) $2\sqrt{2}$

(D) $3\sqrt{2}$

4 函數 $\phi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ 在點 $P = (0, 1, 1)$ 最陡變化方向 (gradient) 為何？

(A) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(B) $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(C) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(D) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

5 矩陣 A 之特徵值 (eigenvalue) 為 5 與 10，而相對應之特徵向量 (eigenvector) 分別為 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，試求

$\det(A)$ ：

(A) 45

(B) 50

(C) 55

(D) 60

6 請選出解空間 (solution space) 相異於其他選項之線性系統。

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
 $-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$

(B) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$
 $-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$

(C) $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9$
 $x_2 + 6x_3 = 7$

(D) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$

7 設 A, B 皆為 3×3 矩陣，且行列式 $|A| = 2$, $|B| = 4$ ，求 $|3AB| = ?$

(A) 8

(B) 24

(C) 72

(D) 216

- 8 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{11}{29} & 49 \\ 0 & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 試問矩陣 AB^{-1} 的行列式值 (determinant) $\det(AB^{-1})$ 為何?
- (A) 0 (B) 29 (C) 55 (D) 78
- 9 滿足 $|z - 1 - i| = 1$ 的 z 值在複數平面的圖形為何?
- (A) 橢圓形 (B) 圓形 (C) 雙曲線 (D) 直線
- 10 下列選項何者正確, 其中 $i = \sqrt{-1}$:
- (A) $\cos(3 + 2i) = \cos(3)\cos(2) - i\sin(3)\sin(2)$ (B) $\cos(3 + 2i) = \cos(3)\cos(2) + i\sin(3)\sin(2)$
- (C) $\cos(3 + 2i) = \cos(3)\cosh(2) - i\sin(3)\sinh(2)$ (D) $\cos(3 + 2i) = \cos(3)\cosh(2) + i\sin(3)\sinh(2)$
- 11 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z| = 1$, 試求積分 $\int_C \frac{z - \sin(z)}{z} dz$ 為何?
- (A) 0 (B) 1 (C) π (D) $\frac{-\pi}{2}$
- 12 級數 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} (z-i)^{2n}$ 之收斂半徑 R 之值為何?
- (A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- 13 下列何者為方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 之解?
- (A) $u = f(x - 4y)$ (B) $u = f(x + 4y)$ (C) $u = f(4x - y)$ (D) $u = f(4x + y)$
- 14 利用 Frobenius 級數 $y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 的方法解微分方程式 $x^2 y'' + x(2x-1)y' + (x+1)y = 0$, 下列何者為本方法的 indicial 方程式?
- (A) $r^2 - 1 = 0$ (B) $r(r+1) = 0$ (C) $(r-1)^2 = 0$ (D) $r(r-1) = 0$

15 定義傅立葉轉換 (Fourier transform) 爲 $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，試問 $f(x) = e^{-2x^2}$ 的傅立葉轉換爲何？

- (A) $\frac{1}{2}e^{-\omega^2/8}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}$ (C) $\frac{1}{2}e^{-\omega^2/2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/2}$

16 下列何者無法進行拉普拉斯轉換？

- (A) $f(t) = t^4$ (B) $f(t) = e^{t^2}$ (C) $f(t) = \cos 3te^{-2t}$ (D) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

17 微分方程式 $x^2 y'' + 0.6xy' + 16.04y = 0$ 之通解爲 $y = x^a [A \cos(b \ln x) + B \sin(b \ln x)]$ ，其中 A 及 B 爲任意常數。試求 a 及 b ？

- (A) $a = 0.2 + 4i$, $b = 0.2 - 4i$ (B) $a = 4 + 0.2i$, $b = 4 - 0.2i$
(C) $a = 0.2$, $b = 4$ (D) $a = 4$, $b = 0.2$

18 疫苗製造商非常關心其血清疫苗的品質，假設每批血清都會依序經由 3 個不同部門的篩檢，血清被各部門淘汰的機率分別爲 0.10, 0.20 及 0.05。假設 3 個部門的篩檢是獨立的，請問某一批血清到第 3 個部門才被淘汰的機率爲何？

- (A) 0.68 (B) 0.05 (C) 0.036 (D) 0.001

19 連續且獨立的擲一個公正的骰子 n 次，令 X 爲出現點數 4 的次數，請問 X 的期望值 $E[X]$ 爲何？

- (A) $1/4$ (B) $n/6$ (C) $n/4$ (D) $n/3$

20 連續隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{if } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求條件變異數 } \text{Var}(Y | X = \frac{1}{3}) ?$$

- (A) $5/18$ (B) $7/36$ (C) $11/150$ (D) $17/180$