

考試別：鐵路人員考試
等別：高員三級考試
類科別：電力工程、電子工程
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、令一行列式為
$$\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 5 \\ 2 & 3+x & 5 \\ 2 & 3 & 5+x \end{vmatrix} = 0$$
，求 x 為何？（10分）

二、令複變函數 $f(z) = \frac{1}{1-3z+2z^2}$ ，試求：

(一) $f(z)$ 的麥克勞林級數（Maclaurin series）展開式。（7分）

(二)第(一)小題之級數的收斂半徑。（3分）

三、 $\frac{d^2y}{dx^2} + e^x y = e^{2x}$ ， $y(0) = 1$ ， $\frac{dy(0)}{dx} = 2$ ，以 $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ 解之，求 C_0 、 C_1 、 C_2 、 C_3 。
（15分）

四、設一隨機變數（random variable） X ，其期望值（expected value）

$E[X] = -3$ ， X 的變異數（variance） $\sigma_X^2 = 2$ 。設 $Y = 2X - 3$ ，求：

(一) Y 的期望值（expected value）： $E[Y]$ 。（5分）

(二) Y^2 的期望值（expected value）： $E[Y^2]$ 。（5分）

(三) Y 的變異數（variance）： σ_Y^2 。（5分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：4703

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 為二向量，則下列有關其內積（inner product）與外積（cross product）的敘述何者錯誤？

- (A) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (B) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ (C) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ (D) $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$

2 在三度空間中，由 $P_1(4, 6, 5)$ 、 $P_2(4, 9, 5)$ 與 $P_3(8, 6, 7)$ 所形成的三角形面積為何？

- (A) $\sqrt{45}$ (B) $\frac{\sqrt{45}}{2}$ (C) 45 (D) $\frac{45}{2}$

3 下列何者是向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在 $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 及 $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 所延伸（span）的空間之投影向量（projection）？

- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

4 試決定 a 與 b 之值，使以下系統方程式具有無限多組解（infinite number of solutions）？

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$2x + y + az = 4$$

$$3x + 2y + 2z = b$$

- (A) $a = -\frac{3}{4}, b = -7$ (B) $a = \frac{3}{4}, b = 7$ (C) $a = -\frac{4}{3}, b = -7$ (D) $a = -\frac{4}{3}, b = 7$

5 假設矩陣 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為兩個相同階數之方陣，且 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 兩矩陣皆為非奇異矩陣，下列敘述何者恆真？

- (A) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 亦為非奇異矩陣 (B) $|\mathbf{AB}| = 0$
(C) 假設 $\mathbf{AB} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ，則 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ (D) $\text{adj}(\mathbf{AB}) = \text{adj}(\mathbf{A})\text{adj}(\mathbf{B})$

6 設矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，下列何者不是 $\mathbf{A}$ 的特徵向量（eigenvector）？

- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

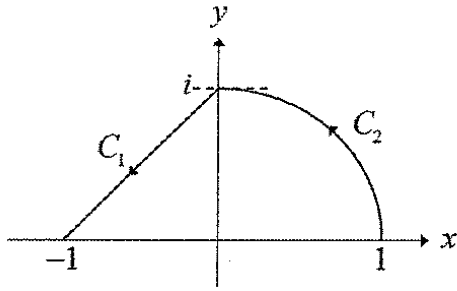
7 請計算 $\cos(2\pi i)$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：

- (A) 1 (B) i (C) $\cosh(2\pi)$ (D) $\frac{1}{2}(e^{-2\pi} - e^{2\pi})$

8 求 $-1+4i$ 的極式（Polar form）？

- (A) $-\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}$ (B) $\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}$ (C) $-\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(0.25))}$ (D) $\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(0.25))}$

- 9 根據下圖所示之路徑 $C = C_1 + C_2$ ， $z = x + yi$ ，試問線積分 $\int_C \bar{z} dz$ 為何？



- (A) $1 + \frac{\pi}{2}i$ (B) $(1 + \frac{\pi}{2})i$ (C) $1 + \frac{5\pi}{2}i$ (D) $(1 + \frac{5\pi}{2})i$
- 10 給定一複數函數 $f(z) = x^2 - y^2 + i2|xy|$ ，其中 $z = x + yi$ ，則下列何者正確？
- (A) $f(z)$ 在 $x > 0$ 且 $y > 0$ 的範圍都是可解析 (Analytic)
- (B) $f(z)$ 在 $x < 0$ 且 $y < 0$ 的範圍都是不可微分
- (C) 當 $xy < 0$ 時， $f(z)$ 是可解析 (Analytic)
- (D) 當 $xy > 0$ 時， $f(z)$ 都是可微分且 $f'(z) = 2x - i2y$
- 11 $z_1 = 4 + 3i$ ， $z_2 = 2 - 5i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ；則 $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 為何？（其中 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數）
- (A) $23 + 14i$ (B) $23 - 14i$ (C) $-23 + 14i$ (D) $-23 - 14i$
- 12 求下列微分方程式的特解：
- $xy' + y = \sin(x)$ 且初始條件 $y(\frac{\pi}{3}) = 0$
- (A) $xy = \frac{1}{2} + \cos(x)$ (B) $xy = \frac{1}{2} - \cos(x)$ (C) $xy = 2 - \cos(x)$ (D) $xy = 2 + \cos(x)$
- 13 已知微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 12x^2$ （其中 $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ）的特殊解是 $y(x) = ax^2 + bx + c$ ， a, b, c 是常數，則下列敘述何者正確？
- (A) $5 < a + b + c < 10$ (B) $0 < a + b + c < 5$ (C) $-5 < a + b + c < 0$ (D) $-10 < a + b + c < -5$
- 14 邊界條件設定為 $\phi(x, 0) = x^4$ 之偏微分方程式 $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - 2 \frac{y}{x} = 0$ ，其解為：
- (A) $\phi = y^2 + x^4 e^{-4y}$ (B) $\phi = y^4 + x^2 e^{-4y}$ (C) $\phi = y^2 + x^2 e^{-4x}$ (D) $\phi = y^2 + x^4 e^{-4x}$

15 求微分方程式 $y'' - y' + x^2 y = 0$ 的級數解：

- (A) $a_0 \left(1 - \frac{1}{12}x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)$ ，其中 a_0, a_1 為常數
 (B) $a_0 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots \right)$ ，其中 a_0, a_1 為常數
 (C) $a_0 \left(1 + \frac{1}{12}x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)$ ，其中 a_0, a_1 為常數
 (D) $a_0 \left(1 - \frac{1}{12}x^4 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \right)$ ，其中 a_0, a_1 為常數

16 定義函數 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ ，令 $L\{f(t)\} = \frac{6s}{(s^2 + 5)^2}$ ，則 $f(t)$ 為何？

- (A) $\frac{6\sqrt{5}}{5} \cos \sqrt{5}t$ (B) $\frac{6\sqrt{5}}{5} \sin \sqrt{5}t$ (C) $\frac{3\sqrt{5}}{5} t \cos \sqrt{5}t$ (D) $\frac{3\sqrt{5}}{5} t \sin \sqrt{5}t$

17 設 $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求其傅立葉轉換 (Fourier transform) 中 $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ 為何？

- (A) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin 2\omega}{\omega}$ (B) $\hat{f}(\omega) = \frac{\sin 2\omega}{\omega}$
 (C) $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2\omega}{\omega}$ (D) $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\omega}{\omega}$

18 令 Z 為一標準常態分布隨機變數 (standard normal random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 為 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ ， $-\infty < z < \infty$ ，試求 $Y = |Z|$ 之機率密度函數：

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$ ， $0 < y < \infty$ (B) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ ， $0 < y < \infty$
 (C) $2ye^{-y^2}$ ， $0 < y < \infty$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2y}}$ ， $0 < y < \infty$

19 給定一個隨機變數 X ，其累積分布函數 (cumulative distribution function)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{7}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{6}{7}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}, \text{試求機率 } P(0 < X \leq 2) \text{ 為何？}$$

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{6}{7}$

20 令 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為獨立隨機變數， $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為任意實數，下列何者錯誤？

- (A) $E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i]$
 (B) $Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i Var(X_i)$
 (C) $Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$
 (D) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(a_i X_i, a_j X_j) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$