

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

(四)作答時請參閱附表。

一、兩隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數為 $f(x, y) = ax^2y, 0 < x < y < 1$ 。

(一)請算出 a 使得 $f(x, y)$ 符合聯合機率密度函數的要求。(9 分)

(二)請分別算出 X, Y 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function) $f_X(x), f_Y(y)$ ，及條件機率密度函數 (conditional probability density function) $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ 。(16 分)

二、假設 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為幾何分配的 $\text{Geo}(p)$ 隨機樣本。

(一)求 p 的最大概似估計 (Maximum likelihood estimator), $\hat{p}$ 。(10 分)

(二)令 $\theta = \frac{1}{p}$ ，統計量 $\frac{1}{\hat{p}}$ 是否為 θ 的充分統計量？是否為 θ 的最小變異不偏估計量 (minimum variance unbiased estimator)？(15 分)

三、某校今年派出 9 名代表參加科學知識競賽，得分及敘述性統計如下：

73	81	74	87	90	89	65	79	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

樣本平均數 = 80.67，樣本標準差 = 8.6747，去年的平均成績為 75.5。

欲比較今年的代表隊成績是否比去年好，在 5% 顯著水準下，考慮兩種方法檢定今年成績是否有顯著進步。檢定結果應包括檢定假說、檢定統計量、臨界值以及檢定結果的詮釋。

(一)假設成績服從常態分配，請完成今年平均成績是否有顯著性進步的檢定。(10 分)

(二)假設成績不服從常態分配但大致上對稱，請以符號檢定 (sign test) 及符號等級檢定 (signed rank test)，分別完成今年的成績中位數是否有顯著性進步的檢定。(20 分)

四、欲比較 4 種環保材質吸管的瑕疵率，研究部門以單因子 (one-way) 隨機實驗各進行 5 次檢測，實驗結果的敘述性統計如下：

Treat i	1	2	3	4
平均數 ($\bar{y}_{i.}$)	15.6	13.8	7.2	11.4

$\bar{y}_{..}^2 = 144$ 、 $\sum_{i=1}^4 \bar{y}_{i.}^2 = 615.6$ 、 $\sum_{j=1}^5 \bar{y}_{.j}^2 = 757.5$ 、 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 y_{ij}^2 = 3,320$ ，其中 y_{ij} 為第 i

種材質在第 j 次實驗的瑕疵率檢測值， $\bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^5 y_{ij} / 5$ 、 $\bar{y}_{.j} = \sum_{i=1}^4 y_{ij} / 4$ 、

$$\bar{y}_{..} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 y_{ij} / 20$$

(一)請完成變異數分析 (ANOVA) 表，以適當的符號定義參數，寫出檢定 4 種材質瑕疵率有差異的假說，並在 5%顯著水準下提出你的檢定結論。(10 分)

(二)假設第 1 種環保材質是市面上常用的材質，其他 3 種是新材質，請寫出常用材質與新材質的平均瑕疵率是否有差異， $\mu_1 = \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$ ，的對比假說，並在 5%顯著水準下提出你的檢定結論。(10 分)

附表

符號等級檢定(威爾卡森，臨界點 $W_{n',\alpha}$)

n' ：去除等於中位數後的樣本數， α ：顯著水準

		樣本數 n'															
單尾	雙尾	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
$\alpha=.05$	$\alpha=.10$	1	2	4	6	8	11	14	17	21	26	30	36				
$\alpha=.025$	$\alpha=.05$		1	2	4	6	8	11	14	17	21	25	30				
$\alpha=.01$	$\alpha=.02$			0	2	3	5	7	10	13	16	20	24				
$\alpha=.005$	$\alpha=.01$				0	2	3	5	7	10	13	16	19				

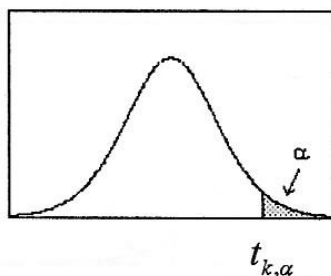
		樣本數 n'															
單尾	雙尾	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28				
$\alpha=.05$	$\alpha=.10$	41	47	54	60	68	75	83	92	101	110	120	130				
$\alpha=.025$	$\alpha=.05$	35	40	46	52	59	66	73	81	90	98	107	117				
$\alpha=.01$	$\alpha=.02$	28	33	38	43	49	56	62	69	77	85	93	102				
$\alpha=.005$	$\alpha=.01$	23	28	32	37	43	49	55	61	68	76	84	92				

		樣本數 n'															
單尾	雙尾	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40				
$\alpha=.05$	$\alpha=.10$	141	152	163	175	188	201	214	228	242	256	271	287				
$\alpha=.025$	$\alpha=.05$	127	137	148	159	171	183	195	208	222	235	250	264				
$\alpha=.01$	$\alpha=.02$	111	120	130	141	151	162	174	186	198	211	224	238				
$\alpha=.005$	$\alpha=.01$	100	109	118	128	138	149	160	171	183	195	208	221				

		樣本數 n'															
單尾	雙尾	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	39	40				
$\alpha=.05$	$\alpha=.10$	303	319	336	353	371	389	408	427	446	466	271	287				
$\alpha=.025$	$\alpha=.05$	279	295	311	327	344	361	379	397	415	434	250	264				
$\alpha=.01$	$\alpha=.02$	252	267	281	297	313	329	345	362	380	398	224	238				
$\alpha=.005$	$\alpha=.01$	234	248	262	277	292	307	323	339	356	373	208	221				

t 分配表

$$P(t_k \geq t_{k,\alpha}) = \alpha$$

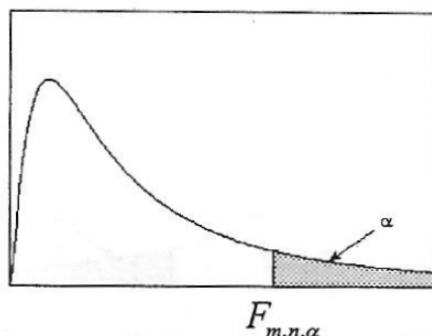


自由度	單尾顯著水準						
	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	127.3213	318.3088
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	14.0890	22.3271
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	7.4533	10.2145
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	5.5976	7.1732
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	5.8934
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.2076
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.0293	4.7853
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	3.8325	4.5008
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4284	3.9296
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7328
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6862
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2224	3.6458
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.6105
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.5272
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.4350
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0380	3.3962
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	2.9960	3.3400
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	2.9712	3.3069
45	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	2.9521	3.2815
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.9370	3.2614
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.2317
70	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.2108
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.8870	3.1953
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	2.8779	3.1833
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	2.8385	3.1315
300	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	2.8279	3.1176
400	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	2.8227	3.1107
500	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857	2.8195	3.1066
600	1.2830	1.6474	1.9639	2.3326	2.5840	2.8175	3.1039
700	1.2828	1.6470	1.9634	2.3317	2.5829	2.8160	3.1019
800	1.2826	1.6468	1.9629	2.3310	2.5820	2.8148	3.1005
900	1.2825	1.6465	1.9626	2.3305	2.5813	2.8140	3.0993
1000	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808	2.8133	3.0984

F分配表

$$\alpha = 0.05$$

$$P(F_{m,n} \geq F_{m,n,\alpha}) = \alpha$$



分
母
自
由
度
n

分子自由度 m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
35	4.1213	3.2674	2.8742	2.6415	2.4851	2.3718	2.2852	2.2167	2.1608
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
45	4.0566	3.2043	2.8115	2.5787	2.4221	2.3083	2.2212	2.1521	2.0958
50	4.0343	3.1826	2.7900	2.5572	2.4004	2.2864	2.1992	2.1299	2.0734
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
70	3.9778	3.1277	2.7355	2.5027	2.3456	2.2312	2.1435	2.0737	2.0166
80	3.9604	3.1108	2.7188	2.4859	2.3287	2.2142	2.1263	2.0564	1.9991
90	3.9469	3.0977	2.7058	2.4729	2.3157	2.2011	2.1131	2.0430	1.9856
100	3.9361	3.0873	2.6955	2.4626	2.3053	2.1906	2.1025	2.0323	1.9748
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588