

代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4-1

102 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、線性方程組以矩陣的符號寫成 $AX = B$ ，令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

(一)利用高斯消去法求解 $AX = B$ 。（5 分）

(二)利用反矩陣（matrix inverses）方法求解 $AX = B$ 。（5 分）

(三)利用 Cramer's 法則（Cramer's rule）求解 $AX = B$ 。（5 分）

二、複數函數 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+4)}$

(一)求 $f(z)$ 以 $z=1$ 為中心展開的羅倫級數（Laurent series）。（7 分）

(二)求 $f(z)$ 在 $z=1$ 的留數（residue）。（3 分）

三、求解下列微分方程式：

(一) $y'' - 10y' + 25y = 0$ 之通解（general solution）。（5 分）

(二) $y'' + 4y = 8$ ； $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 之解。（5 分）

(三) $x^3 y''' + x^2 y'' - 4y' = 0$ 之通解。〔註： $x > 0$ 〕（5 分）

四、兩個隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{XY}(x, y) = x + y; \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}; \quad f_X(x) = x + \frac{1}{2}; \quad f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$$

(一)求 X 與 Y 之共變異數 (covariance) , $\text{Cov}[X, Y]$ 。 (7 分)

(二)求 X 與 Y 之相關係數 (correlation coefficient) , $\rho_{X, Y}$ 。 (3 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2303

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 有一曲線之參數方程式為 $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \sqrt{5}t$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 請問該曲線弧長為何？
(A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) 6π
- 下列何者為線積分 $\int_C yzdx + xzdy + xydz$ 之值，其中曲線 $C: x = t^2$; $y = t$; $z = t + 3$, 而 $0 \leq t \leq 1$?
(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 3
- 下列何者為 $\varphi = 2xz + e^y z^2$ 在點 $(2, 1, 1)$ 於 $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 之方向上之方向導數 (directional derivative) ?
(A) $e/\sqrt{14}$ (B) e (C) $\sqrt{14}e$ (D) $1/\sqrt{e}$
- 下列集合中之向量，何者為線性獨立 (linear independent) ?
(A) $\{(1,1), (1,2), (3,4)\}$ (B) $\{(1,3), (2,0), (-1,3), (7,3)\}$
(C) $\{(2,3,0), (1,-2,4), (1,1,0), (1,1,1)\}$ (D) $\{(2,0,1,-3), (0,1,1,1), (2,2,3,0)\}$
- 若 $\varphi(x, y, z) = xy - yz + xyz$, 則其在點 $P = (0, -1, 1)$ 於方向 $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的改變率 (rate of change) 為何？
(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}$
- 若 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 的對稱實數矩陣，則下列那一項是錯的？
(A) $\mathbf{A}$ 一定可以對角化 (B) 其特徵值不會有相同的
(C) 其特徵值一定是實數 (D) $\mathbf{A}$ 的行列式值等於其所有特徵值之乘積

7 設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為任二 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恒真？

(A) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(B) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

(C) 若 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 均為對稱矩陣 (symmetric matrix)，則 $\mathbf{AB}$ 及 $\mathbf{BA}$ 也必為對稱矩陣

(D) $\mathbf{AA}^T$ 及 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 均為對稱矩陣

8 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ ，其逆矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 表為 $[b_{ij}]$ ，則下列何者錯誤？

(A) $b_{12} = \frac{3}{32}$

(B) $b_{21} = \frac{-1}{4}$

(C) $b_{23} = \frac{3}{4}$

(D) $b_{32} = \frac{-1}{2}$

9 若 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 則 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{O}$ ；試求 $e^{\mathbf{B}t} = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & te^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10 設 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 均為 3×3 的矩陣，若 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 的行列式值分別為 $\det(\mathbf{A}) = -2$ 、 $\det(\mathbf{B}) = 3$ 。則 $\det(-2\mathbf{AB})$ 之值為何？

(A) 12

(B) -12

(C) 48

(D) -48

11 試計算 $i^{(i^2-i)}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：

(A) $e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ， n 為任意整數

(B) $-e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ， n 為任意整數

(C) $i \cdot e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ， n 為任意整數

(D) $-i \cdot e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ， n 為任意整數

12 複數函數 $f(z) = |z|^2$ 在下列何點可微分？

(A) $z = -1$

(B) $z = 0$

(C) $z = 1$

(D) $z = i$

- 13 求複變函數積分 $\int_C |z| dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上由原點至點 $2-2i$ 的直線，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
- (A) $\sqrt{2}(1+i)$ (B) $\sqrt{2}(1-i)$ (C) $2\sqrt{2}(1+i)$ (D) $2\sqrt{2}(1-i)$
- 14 求解微分方程 $5y'' - 3.5y' + 0.6y = 0$ ，其解為：
- (A) $y = c_1 e^{-0.4x} + c_2 e^{0.3x}$ (B) $y = c_1 e^{0.4x} + c_2 e^{0.3x}$ (C) $y = c_1 e^{0.4x} + c_2 e^{-0.3x}$ (D) $y = c_1 e^{-0.4x} + c_2 e^{-0.3x}$
- 15 求解微分方程 $y^{(4)} - 29y'' + 100y = 0$ ，其解為：
- (A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$ (B) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{5x} + c_4 e^{-5x}$
 (C) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$ (D) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{5x} + c_4 x e^{5x}$
- 16 微分方程式 $x^3(1-x)y'' + 2xy' + y = \sin(x)$ 有幾個奇異點 (singular points)？
- (A) 2 個 (B) 3 個 (C) 4 個 (D) 無窮多個
- 17 求解微分方程 $y' + y = y^2$ ，其解為：
- (A) $y = 1 + ce^x$ (B) $y = \frac{1}{1 + ce^x}$ (C) $y = 1 - ce^x$ (D) $y = \frac{1}{1 - ce^x}$
- 18 令 X 及 Y 為均勻 (uniformly) 分布於 $(0, 1)$ 之二獨立 (independent) 連續隨機變數 (continuous random variable)，試求 $P\left(|X - Y| \leq \frac{1}{5}\right) = ?$
- (A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{8}{25}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{5}{16}$
- 19 $F(s)$ 為 $f(t)$ 之拉普拉斯 (Laplace) 轉換，則 $u(t-a)f(t-a)$ 之拉普拉斯轉換為何？其中 $u(t)$ 為單位步階函數及 $a > 0$ ：
- (A) $e^{as}F(s)$ (B) $e^{-as}F(s)$ (C) $F(s-a)$ (D) $F(s+a)$
- 20 隨機變數 X 之期望值 (expected value) $E(X) = 3$ ，變異數 (variance) $\text{Var}(X) = 5$ ，則 $E(3 + 4X + 5X^2) = ?$
- (A) 38 (B) 65 (C) 85 (D) 93