

109年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：調查人員
等 別：三等考試
類 科 組：電子科學組
科 目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、有一個週期 (period) 為2的週期性 (periodic) 連續時間訊號 (continuous-time signal) $x(t)$ ；在 $-1 \leq t < 1$ 的區間內， $x(t) = t^2$ 。將它的傅立葉級數展開式 (Fourier-series expansion) 寫成如下所示的型式：

$$x(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

(每小題4分，共12分)

(一) $\omega_0 = ?$

(二) $A = ?$

(三) $b_1 = ? b_2 = ? b_3 = ?$ (註：答案必須三者全對才有得分)

二、考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)：

微分方程式： $\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \frac{d}{dx} y(x) - 3y(x) = 2e^{-x}$ ，初始條件 (initial conditions)： $y(0) = 1, y'(0) = -1$ ($y'(x)$ 為 $\frac{d}{dx} y(x)$ 之簡寫)。

(一) 求出此微分方程式的齊次解 (homogeneous solution)。換句話說，也就

是求解： $\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \frac{d}{dx} y(x) - 3y(x) = 0$ 。(7分)

(二) 求出原微分方程式的一個特定解 (particular solution)。(7分)

(三) 求出本初始條件問題的精確解 (exact solution)。(6分)

三、考慮如下所示過度求定 (over-determined) 的線性聯立方程組：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

求出此線性聯立方程組的最小平方誤差解 (least-square-error solution)。
(10分)

四、考慮如下所示之矩陣 (matrix) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

- (一) 求出此矩陣之所有的特徵值 (characteristic values, 亦稱 eigenvalues)。(8分)
- (二) 針對每一個特徵值, 求出對應的特徵向量 (characteristic vectors, 亦稱 eigenvectors)。(10分)

五、考慮兩個連續隨機變數 (continuous random variables) X 與 Y , 其合併機率密度函數 (joint probability density function) 如下所示:

$$f(x, y) = \begin{cases} A \cdot x \cdot (1 + y^2), & \text{for } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(每小題5分, 共20分)

- (一) $A = ?$
- (二) 若以 $f_X(x)$ 代表 X 的機率密度函數 (probability density function), 求出 $f_X(x) = ?$
- (三) 若以 $E(Y)$ 代表 Y 的期望值 (expected value), 求出 $E(Y) = ?$
- (四) 若定義一個新的隨機變數 $Z = X \cdot Y$, 而且用 $E(Z)$ 代表 Z 的期望值 (expected value), 求出 $E(Z) = ?$

六、考慮複變函數 $f(z) = z^2$, 其中 z 為複數, 亦可寫成 $z = x + i \cdot y$ (x 與 y 為實數, $i = \sqrt{-1}$)。

- (一) $f(z)$ 可以寫成 $f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$; 求出 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 。(4分)
- (二) 證明 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在整個複數平面上都滿足柯西-黎曼方程式 (Cauchy-Riemann equations)。(6分)
- (三) 在複數平面上, $f(z)$ 是否為可解析 (analytic) 函數? (3分)
- (四) 令 Γ 表示在複數平面上的單位圓之中以逆時針方向從 $1+i \cdot 0$ 走到 $0+i \cdot 1$ 的曲線。計算下列積分的結果: $\int_{\Gamma} f(z) dz$ 。(7分)