

大學入學考試中心
102 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
 - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
 - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
 - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\square^3$ 與第 19 列的 $\square^8$ 畫記，如：

18	$\square^1$	$\square^2$	$\blacksquare^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^+$
19	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\blacksquare^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^+$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\square^-$ 與第 21 列的 $\square^7$ 畫記，如：

20	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\blacksquare^-$	$\square^+$
21	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\blacksquare^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^+$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 z 為一複數，且 $\frac{z-2}{z+2}=i$ （其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位）。試問 z 的絕對值 $|z|$ 為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (4) $\sqrt{2}$ (5) 2

2. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$ 、 $y=\log_2 x$ 的圖形於 P 、 Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$ 、 $y=\log_2 x$ 的圖形於 R 、 S 兩點。試問 四邊形 $PQSR$ 的面積最接近下列哪一個選項？（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ）

(1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

3. 袋中有大小相同編號 1 到 8 號的球各一顆。小明自袋中隨機一次取出兩球，設隨機變數 X 的值為取出兩球中的較小號碼。若 p_k 表 X 取值為 k 的機率 ($k=1,2,\dots,8$)，試問有幾個 p_k 的值大於 $\frac{1}{5}$ ？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

4. 考慮所有由 1、2、3、4、5、6 各一個與三個 0 所排成形如 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ 對角線均為 0 的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$ 為奇數

的機率為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{20}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{9}{10}$ (5) $\frac{19}{20}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 令 $A(-2, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $C(2, 1)$ 、 $D(4, 3)$ 為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

- (1) 恰有一直線通過 A 、 B 、 C 三點
- (2) 恰有一圓通過 A 、 B 、 D 三點
- (3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B 、 C 、 D 三點
- (4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A 、 B 、 C 、 D 四點
- (5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A 、 B 、 C 、 D 四點

6. 設 c 為實數， E_1 、 E_2 、 E_3 皆為坐標空間中的平面，其方程式如下：

$$E_1: \quad cx + y = c$$

$$E_2: \quad cy + z = 0$$

$$E_3: \quad x + cz = 1$$

已知 E_1 、 E_2 、 E_3 有一個交點的 z 坐標為 1，請選出正確的選項。

- (1) $(1, 0, 0)$ 是 E_1 、 E_2 、 E_3 的一個交點
- (2) E_1 、 E_2 、 E_3 有無窮多個交點
- (3) E_1 、 E_2 、 E_3 中一定有兩個平面重合
- (4) $c = 1$
- (5) E_1 、 E_2 、 E_3 有一個交點的 z 坐標為 2

7. 令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$ 。設 a 、 b 、 c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$ ，請選出正確的選項。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 存在
- (2) a 、 b 、 c 至少有一個在 0 與 1 之間
- (3) $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ 為收斂數列
- (4) $b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots$ 為收斂數列
- (5) $c, c^2, c^3, \dots, c^n, \dots$ 為收斂數列

8. 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ ，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

- (1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立
- (2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$
- (3) f 的最小值為 0
- (4) $f\left(\frac{\pi}{10}\right) > f\left(\frac{\pi}{9}\right)$
- (5) 函數 f 的（最小正）週期為 π

9. 考慮向量 $\vec{u} = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v} = (c, d, 1)$ ，其中 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ 。請選出正確的選項。

(1) 向量 $\vec{v}$ 與 z 軸正向的夾角恆為定值（與 c 、 d 之值無關）

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 夾角的最大值為 135°

(4) $ad - bc$ 的值可能為 $\frac{5}{4}$

(5) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

三、選填題（占 12 分）

說明：1.第 A 與 B 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10-15)。

2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 A 、 B 、 C 、 D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC 。已知

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 10, \quad \sin \angle ABC = \frac{4}{5}, \quad \text{且 } \angle ABC \text{ 爲銳角, 則 } \overline{AD} = \underline{\textcircled{10}\sqrt{\textcircled{11}}}。$$

（化成最簡根式）

B. 設 m 爲實數。若圓 $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 10 = 0$ 與直線 $y = m(x + 3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍爲 $a < m < b$ ，則

$$a = \underline{\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}}, \quad b = \underline{\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}}。 \quad \text{（化成最簡分數）}$$

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$ ，函數 $y = p(x)$ 、 $y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$ 、 $x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$ （其中 C 為常數）。

(1) 試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立。（2 分）

(2) 設 $t \geq 1$ ，試求 $\int_1^t (-1 - x^2) dx$ 。（3 分）

(3) 試求 C 。（2 分）

(4) 試求 $p(x)$ 。（5 分）

二. 設 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 為坐標平面上兩點， C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後， A 被映射至 $A'(1, \sqrt{2})$ 、 B 被映射至 $B'(-1, \sqrt{2})$ ，而 C 被映射至 C' 。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？（4 分）

(2) 試證明變換 M 將 $\triangle ABC$ 的重心映射至 $\triangle A'B'C'$ 的重心。（4 分）

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。（4 分）