

115年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：統計
科 目：統計學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、2026 年國際貨幣基金組織、世界銀行與聯合國糧食計劃署聯合聲明指出，美伊最近在中東的衝突導致油價與化肥價格飆升，推高糧食價格，造成全球性系統性生存危機。假設某國際組織蒐集了 14 個低收入國家在衝突前後的化肥價格（以變數 X 表示，單位：美元／噸）及糧食價格指數（以變數 Y 表示）等相關數據，用以評估此危機之影響。（註：答案數字若可整除請以小數表示，若不可整除請以分數表示）

（每小題 10 分，共 30 分）

(一)考慮用最小平方方法建立簡單直線迴歸模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, 14$ ，假設誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{14}$ 彼此相互獨立且服從平均數為 0，變異數為 σ^2 之常態分配。求在 $H_0: \beta_1 = 0$ 之下，迴歸之判定係數（coefficient of determination） R^2 之機率密度函數。

(二)以 14 個國家的資料及最小平方方法進行估計，若以 Y 為應變數、 X 為自變數作簡單直線迴歸，得 $\hat{Y} = 40 + 2X$ ；但若以 X 為應變數、 Y 為自變數作簡單直線迴歸，得 $\hat{X} = 30 + 0.375Y$ 。針對題(一)之模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, 14$ ，請計算用以檢定迴歸模型整體顯著性之 F 檢定統計量之值。

(三)續題(二)，若已知 $\sum_{i=1}^{14} (X_i - \bar{X})^2 = 100$ ，求 $\hat{\beta}_1$ 的標準誤 $\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_1)}$ 之估計值。

二、全球低軌衛星網路已大規模部署，衛星覆蓋範圍延伸至偏遠地區與極地，提供高速且穩定的聯網服務。某低軌衛星星座由 800 枚衛星組成，每枚衛星每日可服務隨機到達的連線請求。今工程師從營運資料中抽取樣本，以評估覆蓋率與延遲表現。已知每枚衛星每小時接收到的連線請求次數服從卜瓦松 (Poisson) 分配，其平均發生頻率為 λ 次／小時。(註：答案數字若可整除請以小數表示，若不可整除請以分數或自然指數 e 表示)(每小題 10 分，共 70 分)

(一) 假設過去針對某枚衛星觀測到一組連線請求間隔時間的隨機樣本 $T_1, T_2, \dots, T_n$ (單位：小時)，且假設 $E(T_i) = \frac{1}{\lambda}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。請以隨機樣本 $T_1, T_2, \dots, T_n$ ，求出該枚衛星自某時間點起，「等候下一次連線請求的時間在 30 分鐘以內」之發生機率的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

(二) 已知某極地區域每日連線請求次數 N 服從具有平均數為 50 之 Poisson 分配，另已知每次請求的資料量為彼此相互獨立，具有平均數 0.2 MB 的指數分配，亦即，若令 M_i 為第 i 次請求連線的資料量，則 $M_1, M_2, \dots$ 為彼此相互獨立且均具有平均數 0.2 MB 的指數分配。假設 N 與 M_i 獨立。求該極地區域每日連線總資料量 $S = \sum_{i=1}^N M_i$ 的變異數。

(三) 衛星聯網需要與地面核心網對接。若已知有三個獨立運行的地面接收站 A、B 與 C，其系統發生「封包遺失」的次數分別符合獨立的 Poisson 分配，且其遺失的頻率分別為 $\lambda_A = 0.3$ 次／小時、 $\lambda_B = 0.2$ 次／小時及 $\lambda_C = 0.5$ 次／小時。求一小時內這三個接收站合計發生至少 1 次封包遺失的機率。

(四) 續題(三)，若在某小時內已知這三個接收站合計發生 3 次封包遺失，求這 3 次封包遺失全部都不是由 A 接收站造成的條件機率。

(五) 某低軌衛星上裝有三個獨立運作、相互備援的訊號偵測感測器，每個感測器的失效時間均服從平均數為 6 (年) 的指數分布。求這三個感測器中，「最後一個」失效時間的期望值。

(六) 續題(五)，若已知這三個感測器中，最早失效的感測器其失效時間已經超過 1 年的條件下，求它在未來 1 年內就會失效的條件機率。

(七) 續題(五)，令 Z_i 為第 i 個感測器的失效時間，求第一個失效的感測器失效後，偵測系統還能存活的時間的期望值 $E[\text{Max}\{Z_1, Z_2, Z_3\} - \text{Min}\{Z_1, Z_2, Z_3\}]$ 。