

大學入學考試中心
九十五學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, $\pm$ 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	1	2	<input checked="" type="text" value="3"/>	4	5	6	7	8	9	0	-	±	

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 與 劃記，如：

5	<input checked="" type="text" value="1"/>	2	<input checked="" type="text" value="3"/>	4	5	6	7	8	9	0	-	±
---	---	--------------------------------	---	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{(20)(21)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 與第 21 列的 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	<input checked="" type="text" value="-"/>	±
21	1	2	3	4	5	6	<input checked="" type="text" value="7"/>	8	9	0	-	±

►► 試題最後附有計算可能用到的數值。

祝考試順利

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 77 分)

一、單選題 (18%)

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。
每題答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣1.5分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 試問方程式 $(x^2 + x + 1)^3 + 1 = 0$ 有幾個相異實數解？
 - (1) 0個
 - (2) 1個
 - (3) 2個
 - (4) 3個
 - (5) 6個

2. 在坐標平面上，設 P 為 $y = 2 + x - x^2$ 圖形上的一點。若 P 的 x 坐標為 $\log_3 10$ ，則 P 點的位置在
 - (1) 第一象限
 - (2) 第二象限
 - (3) 第三象限
 - (4) 第四象限
 - (5) 坐標軸上

3. 在坐標平面上給定兩點 $A(1,3)$ 與 $B(5,6)$ 。考慮坐標平面上的點集合 $S = \{ P \mid \Delta PAB \text{ 之面積為 } 10 \text{ 且周長為 } 15 \}$ ，則
 - (1) S 為空集合
 - (2) S 恰含2個點
 - (3) S 恰含4個點
 - (4) S 為兩線段之聯集
 - (5) S 為兩直線之聯集

二、多 選 題 (24%)

說明：第 4 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 擲一枚均勻硬幣 4 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ；擲一枚均勻硬幣 8 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？

- (1) $a_2 = \frac{1}{2}$
- (2) $a_2 = b_4$
- (3) $b_2 = b_6$
- (4) $a_3 > b_3$
- (5) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$ 中的最大值是 b_4

5. 在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y = x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？

- (1) $y = 2x^2$
- (2) $y = -x^2$
- (3) $x = y^2$
- (4) $y = x^2 + 4x + 3$
- (5) $(x + y) = (x - y)^2$

6. 考慮多項式函數 $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3$ ，試問以下哪些選項是正確的？

- (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{f(k+100)} = 0$ (k 為正整數)；
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ ；
- (3) 函數 f 在區間 $[\frac{1}{2}, 1]$ 遞增；
- (4) 若 $x \geq 0$ ，則 $f(x) \geq 0$ ；
- (5) 在坐標平面上 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 3$ 恰有兩個交點。

三、選填題 (35%)

說明：A至E各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (7-24) 內。每一題完全答對得7分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設 $\vec{u}, \vec{v}$ 為兩非零向量。以 $|\vec{u}|$ 表 $\vec{u}$ 之長度，若 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| = |2\vec{u} + 3\vec{v}|$ ，且 θ 表 $\vec{u}$ 與

$\vec{v}$ 之夾角，則 $\cos \theta = \frac{\textcircled{7}\textcircled{8}}{\textcircled{9}}$ 。(化成最簡分數)

B. 在坐標空間中，球面 S 交 xy 平面於一半徑為 $\sqrt{13}$ 、圓心為 $(2, 3, 0)$ 的圓，且 S 通過點 $(6, 6, 6)$ ，則 S 的半徑為 $\sqrt{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。

C. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ，
則 $a = \underline{\textcircled{12}}$ ， $b = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ ， $c = \underline{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ ， $d = \underline{\textcircled{17}}$ 。

- D. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，則 $r = \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ， $s = \frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{\textcircled{22}}$ 。(化成最簡分數)

- E. 以 O 表坐標平面的原點。給定一點 $A(4,3)$ ，而點 $B(x,0)$ 在正 x 軸上變動。若 $l(x)$ 表 $\overline{AB}$ 長，則 $\triangle OAB$ 中兩邊長比值 $\frac{x}{l(x)}$ 的最大值為 $\frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}}$ 。(化成最簡分數)

———以下部分作答於答案卷———

第貳部分：非選擇題（佔 23 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

一. (1) (3 分) 將 48510 分解成質因數的乘積。

(2) (7 分) 寫出在 1 和 250 之間且與 48510 互質的所有合數(合數就是比 1 大而不是質數的整數)。

二. 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。

(1) (2 分) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？

(2) (6 分) 試求定海神針原來的長度。

(3) (5 分) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

常用數值

1. $\pi \approx 3.1416$

2. $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.7321$, $\sqrt{5} \approx 2.2361$, $\sqrt{7} \approx 2.6458$ 。

3. $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。