

113年公務人員特種考試關務人員、身心障礙人員考試及
113年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考試別：身心障礙人員考試

等別：三等考試

類科：電力工程

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮下列微分方程式：

$$2x \cdot \cos(3y) - 3x^2 \cdot \sin(3y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

- (一)請證明這是一個正合 (exact) 的微分方程式。(5分)
- (二)請求取此微分方程式的一般解 (general solution)。(10分)
- (三)針對此微分方程式，再加上初始條件： $y(1) = 0$ 。請求取 $y(x)$ 的精確解 (exact solution)。(5分)

二、考慮下列矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- (一)請證明矩陣 A 為可逆 (invertible)。(5分)
- (二)請計算矩陣 A 的行列式 (determinant)。(5分)
- (三)請求取矩陣 A 的反矩陣 (inverse matrix)。(10分)
- (四)如果用 B 代表矩陣 A 的反矩陣，則 B^4 的行列式數值為何？(10分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：4311

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 的秩 $\text{rank}(A)$ 為何？

(A) 5

(B) 4

(C) 3

(D) 2

2 下列何者為二階常微分方程式 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解 (c_1, c_2 為任一實數 (real values))？

(A) $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^3$ (B) $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-3}$ (C) $y = c_1 x + c_2 x^3$ (D) $y = c_1 x + c_2 x^{-3}$

3 令 $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 為一個線性映射函數，其定義為 $T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$ ，則下列何者錯誤？

(A) 函數 T 之零核空間 (null space) 的維度為 0

(B) 函數 T 的秩 (rank) 為 2

(C) 函數 T 為一對一函數

(D) 函數 T 之列空間 (row space) 的維度為 0

4 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ 為一斜對稱矩陣 (skew symmetric matrix)，其中

a, b, c 為實常數，則下列何者錯誤？

(A) $a = 2$

(B) a, b 兩數乘積 $ab = 6$

(C) a, c 兩數乘積 $ac = -6$

(D) b, c 兩數乘積 $bc = 9$

- 5 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ ，則其行列式 $\det(A)$ 為何？
 (A) $x^3(10+x)$ (B) $x^3(10+4x)$ (C) $24(10+x^4)$ (D) $30(10+4x^4)$
- 6 下列何者不是矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特徵向量/固有向量 (characteristic vector/eigenvector)？
 (A) $I = [-1 \ 1 \ 1]^T$ (B) $J = [-1 \ -1 \ 1]^T$
 (C) $K = [1 \ 1 \ 1]^T$ (D) $L = [1 \ -1 \ 1]^T$
- 7 下列給定的矩陣，何者不可對角化？
 (A) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$ (D) $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$
- 8 空間 $\mathbf{R}^3$ 中的四點 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(2, x, 4)$ 、 $C(5, 5, 7)$ 與 $D(8, 8, 10)$ 共平面，則 x 為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 9 微分方程式 $(y + x^3)dx = xdy$ 滿足 $y(1) = 2$ 的解為 $y = ax^3 + bx^c$ ，其中 a, b, c 為實常數，則下列何者正確？
 (A) $a = 1$ (B) $b = \frac{1}{2}$ (C) $c = 2$ (D) $c = 1$
- 10 令週期函數 $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ ， $f(x) = f(x+2)$ ，其傅立葉級數 (Fourier series) 展開為 $f(x) = \frac{4}{\pi}(\cdots + a \sin(\pi x) + b \sin(2\pi x) + c \sin(3\pi x) + d \sin(4\pi x) + \cdots)$ ，其中 a, b, c, d 為實常數，則 $a+b+c+d$ 之值為何？
 (A) $\frac{-4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{-1}{3}$

- 11 若使 $(4x^2y - 3xy^2)dx + (x^3 - 2x^2y)dy = 0$ 為正合 (exact) 的積分因子為 $x^m y^n$ ，其中 m 與 n 皆為實數，則 $m+n$ 之值為何？
 (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- 12 下列各組函數，何者不為線性獨立 (linearly independent)？
 (A) e^x 、 e^{-x} 、 e^{2x} ， $-\infty < x < \infty$ (B) $\ln x$ 、 $\ln x^2$ 、 $\ln x^3$ ， $0 < x < \infty$
 (C) 1 、 x 、 x^2 ， $-\infty < x < \infty$ (D) 1 、 $\cos x$ 、 $\sin x$ ， $-\infty < x < \infty$
- 13 微積分式 $y'(t) = \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$ ， $y(0) = 1$ 之解為何？
 (A) $y(t) = \sin t + \frac{t}{2}$ (B) $y(t) = \sin t + \frac{t^2}{2}$
 (C) $y(t) = 1 + \frac{t}{2}$ (D) $y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$
- 14 複變函數 $f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)^2(z+4)}$ ，若 C 為逆時針方向繞圓周 $|z| = 3$ 的路徑，則下列何者是積分 $\oint_C f(z) dz$ 之值？
 (A) $\frac{-1}{8}\pi i$ (B) $\frac{1}{8}\pi i$ (C) $\frac{-1}{24}\pi i$ (D) $\frac{1}{24}\pi i$
- 15 複變函數 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ，針對區域 $1 < |z| < 2$ 對函數 $f(z)$ 展開可得 $f(z) = \cdots + az^{-2} + bz^{-1} + c + dz + \cdots$ ，其中 a, b, c, d 為實常數，則下列何者正確？
 (A) $a = 1$ (B) $b = -1$ (C) $c = \frac{1}{2}$ (D) $d = \frac{1}{4}$
- 16 下列複變函數何者不滿足柯西-黎曼方程式 (Cauchy-Riemann equation) 而為不可解析函數 (極點除外)？(其中 $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$)
 (A) $f(z) = e^{-x} \cos(y) - ie^{-x} \sin(y)$
 (B) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$
 (C) $f(z) = 3\pi^2 / (z^3 + 4\pi^2 z)$
 (D) $f(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$

- 17 下列何者是複數方程式 $z^4 - 6iz^2 + 16 = 0$ 的其中一根？（其中 $i = \sqrt{-1}$ ）
(A) $1+i$ (B) $-1+2i$ (C) $-2+i$ (D) $2+2i$
- 18 已知隨機變數 $Z = 3X - 2Y + 3$ 的變異數（variance）為 54，其中 X 的變異數為 $\sigma_X^2 = 2$ ，且 X 與 Y 的共變異數（covariance）為 $\sigma_{XY} = -2$ ，則隨機變數 Y 的變異數 σ_Y^2 為何？
(A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1
- 19 已知隨機變數 X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，則下列何者正確？
(A) X^2 的期望值（expected value） $E[X^2] = \frac{1}{10}$
(B) Y^2 的期望值（expected value） $E[Y^2] = \frac{1}{8}$
(C) X 的期望值（expected value） $E[X] = \frac{1}{15}$
(D) Y 的期望值（expected value） $E[Y] = \frac{1}{5}$
- 20 某電流自 P 流至 Q 需經過 a、b、c 三個並聯的開關。已知 a、b、c 個別接通之機率分別為 0.4、0.5 與 0.6；a 與 b 均接通之機率為 0.2；b 與 c 均接通之機率為 0.3；a 與 c 均接通之機率為 0.24；a、b、c 均接通之機率為 0.12。試求電流自 P 流至 Q 之機率為何？
(A) 0.88 (B) 0.76 (C) 0.70 (D) 0.64