

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：迴歸分析

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、對以下之簡單線性迴歸模式

$$Y_i = 1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, n,$$

X_i 為已知自變數 (independent variable) 且不全為 0。令 $\hat{\beta}_1$ 是參數 β_1 之最小平方估計量 (least squares estimator) 及 $\alpha = e^{\beta_1}$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)請找出參數 α 之最大概式估計量 (maximum likelihood estimator)。(二)請求出 $\hat{\beta}_1$ 之期望值 $E(\hat{\beta}_1)$ 及變異數 $Var(\hat{\beta}_1)$ (請詳列推導過程)。二、 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 10$, 為對應以下簡單線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, 10,$$

之觀察值。對以下 x_i 值時， y_i 有重覆觀察值：

x_i 值	重覆觀察 y_i 值
90	81, 83
66	68, 60, 62
51	60, 64
35	51, 53

令 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 為 β_0 及 β_1 之最小平方估計量之值。給定以下結果：

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 44249, \sum_{i=1}^{10} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 118.44, \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i.$$

(一)試完成以下對應虛無假設 (null hypothesis)

 $H_0: \beta_0 = \beta_1 = 0$ 之變異數分析表 (ANOVA table) : (1)~(8)

來源	自由度 (degree of freedom)	平方和 (sum of squares)	均方和 (mean square)	F
迴歸 (Regression)	2	(3)	(6)	(8)
殘差 (Error)	(1)	(4)	(7)	
總和	(2)	(5)		

並寫出 F 統計量之虛無分布 (null distribution)，即 F 統計量在虛無假設成立時之機率分布。(15 分)

(二)請算出缺適 (lack of fit or goodness of fit) 檢定統計量之值。並明確寫出檢定統計量之虛無分布。(10 分)

(請接背面)

等 別：三等考試
類 科：統計
科 目：迴歸分析

三、 $(x_{i1}, x_{i2}, y_i), i=1, \dots, 4$, 為對應以下多重線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i=1, \dots, 4,$$

之觀察值。令 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 及 $\hat{\beta}_2$ 為 β_0 、 β_1 及 β_2 之最小平方估計量或其值。 X 為自變數矩陣，

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \end{bmatrix}。$$

給定以下之結果：

$$X^t X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^4 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.5,$$

$$\sum_{i=1}^4 y_i = 10, \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2}。$$

(一)算出 $\hat{\beta}$ 之共變異數矩陣 (covariance matrix)，即 $\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta})$ 。(5 分)

(二)算出 R^2 。(5 分)

(三)給定 $\alpha = 0.05$ ，利用 t 統計量檢定

$$H_0: \beta_2 + 1 \geq 0 \text{ versus } H_1: \beta_2 + 1 < 0。(10 分)$$

$$(t_{2,0.05} = 2.92, t_{2,0.025} = 4.303, t_{1,0.05} = 6.314, t_{1,0.025} = 12.706)$$

(四)給定 $\alpha = 0.05$ ，利用 F 統計量檢定

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ versus } H_1: \beta_0 \neq 0 \text{ or } \beta_1 \neq 0 \text{ or } \beta_2 \neq 0。(10 分)$$

$$(F_{3,1,0.05} = 216, F_{3,2,0.05} = 19.2, F_{2,1,0.05} = 200, F_{2,2,0.05} = 19)$$

(五)算出 β_1 之 95% 之信賴區間。(5 分)

四、考慮以下多重線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i=1, \dots, n。$$

令

$$Y = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]^t, X_j = [X_{1j} \ X_{2j} \ \dots \ X_{nj}]^t, j=1, \dots, p。$$

假設 $X_{ij}, i=1, \dots, n$, 不全為 0 且 $X_j^t X_k = 0, j \neq k$ 。

(一)試以 Y 及 X_j 來表示 $\beta_1, \dots, \beta_p$ 之最小平方估計量以及殘差平方和 (residual sum of squares)。(12 分)

(二)考慮另一線性迴歸模式 $Y_i = \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \dots + \alpha_p X_{ip} + \zeta_i, i=1, \dots, n$,

$\zeta_i \sim N(0, a^2 \sigma^2)$ 為彼此獨立之隨機誤差且 a 為正常數。試求以 Y 及 X_j 來表示 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 之加權最小平方估計量 (weighted least squares estimator)，且找出此加權最小平方估計量與在(一)之 $\beta_1, \dots, \beta_p$ 最小平方估計量之關係式。(8 分)