

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

請計算出 $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{v}^T \mathbf{Bv}$, $\det(\mathbf{A}^2)$ 。(20 分)

二、請找出下列微分方程系統的通解並決定其臨界點的型態和穩定度。(20 分)

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

三、請解下列初始值問題：

$$y'' + 4y = 8x^2, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0. \quad (15 \text{ 分})$$

四、請證明 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ，這些三角函數 (trigonometric functions) 在 $-\pi < x < \pi$ 之間是彼此正交的 (orthogonal)。(15 分)

五、請定義和解釋單位步階函數 (Unit Step Function)，並推導出它的拉普拉斯轉換 (Laplace transform)。(10 分)

六、請解下列邊界值問題：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y = \pm 1 \quad \text{and } \psi(0, y) = \psi(L, y) \quad \text{其中 } \bar{u} \text{ 和 } \beta \text{ 都是常數。} \quad (20 \text{ 分})$$