

107年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、試求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之特徵值及特徵向量。（10 分）

二、令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -12 \\ -4 & 5 & 8 \\ 6 & -6 & -11 \end{bmatrix}$ 。

(一)試求一可逆矩陣 $\mathbf{Q}$ 與一對角矩陣 $\mathbf{D}$ 使得 $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ ，其中 $\mathbf{D}$ 必須為

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 的型式。（10 分）

(二)試求 $\mathbf{A}^{25} + 3\mathbf{A}^{100}$ 。（5 分）

三、試用拉普拉氏轉換（Laplace transform）方法求解聯立微分方程式：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) + \frac{d}{dt}y(t) - x(t) = 0 \\ \frac{d}{dt}x(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) = \sin(2t), \quad x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

四、一隨機變數 X 之機率密度函數（density function）為 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，

其中 $\lambda > 0$ ，求 $E[X|X > 5]$ 為何？（15 分）

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6611

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列何者不是 $\mathbf{A}$ 的特徵值 (eigenvalue)？

(A)1

(B)2

(C)3

(D)4

2 某向量空間 $\{[a+c \quad b-a \quad c-b \quad b+a]^T \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$ ，則下列何者不為其基底向量之一？

(A) $[1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$

(B) $[0 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^T$

(C) $[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$

(D) $[0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$

3 關於線性方程式 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 27 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確？

(A)具有唯一解

(B)具有無窮多個解

(C)無解

(D) $(x_1, x_2, x_3) = (5, -27, 7)$ 為一解

4 設 S 為 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ 型態的所有 $\mathbf{R}^3$ 向量所組成的集合 (其中 $x, y \in \mathbf{R}$)，則向量 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 在 S 上的投影向

量為何？

(A) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$

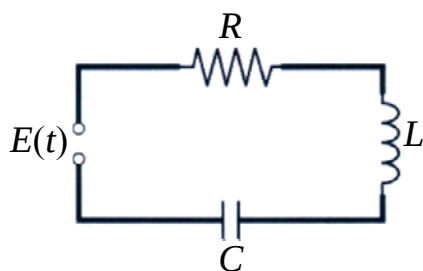
(C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

5 給定矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者錯誤？

(A) $\{[1 \ 2 \ 1], [0 \ 1 \ -1], [0 \ 0 \ 1]\}$ 可為矩陣 $\mathbf{A}$ 列空間 (row space) 的一組基底 (basis)(B) $\{[0 \ 1 \ 1]^T, [0 \ 2 \ 0]^T, [-2 \ 1 \ 3]^T\}$ 可為矩陣 $\mathbf{A}$ 行空間 (column space) 的一組基底 (basis)(C) 矩陣 $\mathbf{A}$ 的零空間 (null space) 之維度 (nullity) 為 1(D) 矩陣 $\mathbf{A}$ 的秩 (rank) 為 3

- 6 假設函數 $f(t) = te^{-t} \cos t$ 的拉普拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $F(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(s^2 + 2s + 2)^2}$ ，其中 a, b, c 是常數，求 $a+b+c=?$
- (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3
- 7 假設 $w = f(z) = z^2 + 3z$ ，若 $z = 1 + 3i$ ，下列敘述何者正確？
- (A) $f(1 + 3i)$ 的實部 (Real part) 為 13 (B) $f(1 + 3i)$ 的虛部 (Imaginary part) 為 15
(C) $f(1 + 3i)$ 的實部 (Real part) 為 5 (D) $f(1 + 3i)$ 的虛部 (Imaginary part) 為 -15
- 8 下列複數函數何者在任意範圍都是可微分 (differentiable)？其中 $z = x + yi$ 。
- (A) $f(z) = |z|^2$ (B) $f(z) = \text{Im}[z]$
(C) $f(z) = \log_{\frac{\pi}{4}}(z)$ (D) $f(z) = x^3 + 2xy^2 + i(y^3 + 2x^2y)$
- 9 令 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-5)^n$ 為一複數冪級數 (complex power series)，且已知其收斂半徑為 3，則下列敘述何者錯誤？
- (A) 此級數在 $z = 0$ 收斂 (B) 此級數在 $z = 5$ 收斂
(C) 此級數在 $z = 7 + 2i$ 收斂 (D) 此級數在 $z = 3 - 2i$ 收斂
- 10 下列何者為微分方程式 $y'' - 2y' + y = -12e^x$ 之通解 (其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$)？(選項中， c_1, c_2 為任意常數)
- (A) $y = c_1 + c_2e^x - 6xe^x$ (B) $y = c_1e^x + c_2xe^x - 6x^2e^x$
(C) $y = c_1 + c_2e^x - 24xe^x$ (D) $y = c_1e^x + c_2xe^x - 24x^2e^x$
- 11 下圖顯示一串聯 RLC 電路，其輸入電壓為 $E(t) = E_0 \sin \omega t$ ，串聯電流為 $I(t)$ 。描述此電路之二次微分方程式為 $I'' + aI' + bI = \frac{1}{L} E_0 \omega \cos \omega t$ 。試求出 a 及 b 值。



- (A) $a = \frac{R}{L}, b = \frac{1}{LC}$
(B) $a = \frac{R}{L}, b = \frac{C}{L}$
(C) $a = \frac{1}{LR}, b = \frac{C}{L}$
(D) $a = \frac{1}{LR}, b = \frac{1}{LC}$

- 12 假設二次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ 之通解為 $A \cos 2\pi x + B \sin 2\pi x$ ，其中 A 及 B 為任意常數，試求出 a 及 b 值。
- (A) $a = 4\pi^2, b = 0$ (B) $a = 0, b = 4\pi^2$ (C) $a = 0, b = -4\pi^2$ (D) $a = -4\pi^2, b = 0$
- 13 $z = 1 + i$ ，則複數對數 $\ln z$ 為何？（選項中 n 為整數）
- (A) $i\sqrt{2} \ln(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$ (B) $-i\sqrt{2} \ln(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$ (C) $\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$ (D) $\ln \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$
- 14 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若有一可逆矩陣 $\mathbf{Q}$ 與一對角矩陣 $\mathbf{D}$ 滿足 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$ ，試問 $\mathbf{D}$ 可為何？
- (A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- 15 求 $\cosh(at)\cos(at)$ 之拉普拉斯氏轉換（Laplace transform）為下列何者？
- (A) $\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$ (B) $\frac{2a^2 + s^2}{s^4 + 4a^4}$ (C) $\frac{s^2 - 2a^2}{s^4 + 4a^4}$ (D) $\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$
- 16 假設週期函數 $f(t) = t^2$ ， $-1 \leq t < 1$ ，週期為 2，求其 Fourier 級數中的常數項。
- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$
- 17 試求 $\frac{\sin 3t}{\pi t} * \cos 10t$ 為何？其中 $*$ 表示迴旋積分（convolution integral）。
- (A) $-\frac{1}{2\pi}$ (B) $\frac{1}{2\pi}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0
- 18 6 位老師被分配教授「工程數學」課程的 4 個章節，如果每位老師最多分配一個章節，有幾種分配方式？
- (A) 90 (B) 180 (C) 240 (D) 360
- 19 設離散隨機變數（random variable） X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為
- $$f_{X,Y}(x,y) = 0.1\delta(x+1)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y-2) + 0.4\delta(x-1)\delta(y+2) \\ + 0.2\delta(x-1)\delta(y-1) + 0.1\delta(x-1)\delta(y-3)$$
- 其中 $\delta(\cdot)$ 為單位脈衝函式（unit impulse function），則 $E[XY]$ 之值為何？其中 $E[Z]$ 定義為隨機變數 Z 的期望值。
- (A) 0 (B) -0.3 (C) -0.5 (D) -0.6
- 20 某隨機變數 X 之期望值 $E[X] = 1$ ，變異數 $\text{Var}[X] = 2$ ，則 $E[(1+X)^2] = ?$
- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 12