

等 別：三等考試

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、假設 $(x(t), y(t), z(t))$ 滿足以下線性系統：

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x - y + z. \end{cases} \quad (1)$$

(一)請求出滿足(1)之 $(x, y, z)$ 的通解。(20 分)

(二)令 $(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$ 滿足(1)及初始值 $(x_p(0), y_p(0), z_p(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ 的解。試問對任何 $(x_0, y_0, z_0)$ ， $(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$ 在 $t \rightarrow \infty$ 是否都有界？如果不是，是否能給出適當 $(x_0, y_0, z_0)$ 使得 $(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$ 在 $t \rightarrow \infty$ 維持有界。(10 分)

二、利用分離變數法求解以下熱方程的初始及邊界值問題：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - au, 0 < x < h, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(h, t) = 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < h. \end{cases}$$

此時  $a$  為一個正數。(提示：設解 $u(x, t) = v(x, t) + \phi(x)$ ，利用 $\phi$ 來處理非零邊界條件。不需要算出傅立葉級數的係數，只要寫出積分公式即可。)  
(25 分)

三、定義函數空間  $C_0^1((0,1)) = \{ \text{函數 } f(x) \text{ 在每點 } x \in (0,1) \text{ 都可微分且微分 } f'(x) \text{ 在 } (0,1) \text{ 是連續函數, } f(0) = f(1) = 0 \}$ 。假設

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(v')^2 + v^2 - 2xe^x v] dx,$$

$v \in C_0^1((0,1))$ 。請在  $C_0^1((0,1))$  函數空間中找出使  $I(v)$  為最小的函數  $v$ ，需要說明為什麼這個  $v$  使  $I(v)$  為最小。(提示：變分法) (25 分)

四、求  $y = y(x)$  滿足

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y = (\ln x)/x, \\ y(1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

試問這樣的  $y(x)$  是不是唯一的？(20 分)