

大學入學考試中心

九十九學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正帶(液)
• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為 (1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而考生得到的答案為 7，亦即選項 (3) 時，考生要在答案卡第 1 列的 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±		
1	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

例：若多選題第 10 題考生認為正確的選項為 (1) 與 (3) 時，考生要在答案卡第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±		
10	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±		
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±		
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有可能用到的參考公式及數值

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 35 分）

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 若數列 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{10}$ 中每一項皆為 1 或 -1 ，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值有多少種可能？
(1) 10 (2) 11 (3) P_2^{10} (4) C_2^{10} (5) 2^{10}

2. 已知 a, b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值 $|a+b|$ 為何？
(1) 16 (2) 31 (3) 32 (4) 39 (5) 條件不足，無法確定

3. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？
(1) 20 元 (2) 30 元 (3) 40 元 (4) 50 元 (5) 60 元

4. 坐標平面上給定兩點 $A(1,0)$ 與 $B(0,1)$ ，又考慮另外三點 $P(\pi,1)$ 、 $Q(-\sqrt{3},6)$ 與 $R(2, \log_4 32)$ 。令 ΔPAB 的面積為 p 、 ΔQAB 的面積為 q 、 ΔRAB 的面積為 r 。請問下列哪一個選項是正確的？
(1) $p < q < r$
(2) $p < r < q$
(3) $q < p < r$
(4) $q < r < p$
(5) $r < q < p$

5. 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

(1) 9 千隻 (2) 108 千隻 (3) 2200 千隻 (4) 3200 千隻 (5) 32000 千隻

6. 坐標空間中 O 為原點，點 A 的坐標為 $(1, 2, 1)$ 。設 S 是以 O 為球心、4 為半徑的球面。請問在 S 上滿足內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 6$ 的所有點 P 所成的圖形為何？

(1) 空集合 (2) 一個點 (3) 兩個點 (4) 一個圓 (5) 兩個圓

7. 令橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 、 $\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2$ 、 $\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5}$ 的長軸長分別為 l_1 、 l_2 、 l_3 。請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $l_1 = l_2 = l_3$

(2) $l_1 = l_2 < l_3$

(3) $l_1 < l_2 < l_3$

(4) $l_1 = l_3 < l_2$

(5) $l_1 < l_3 < l_2$

二、多選題（佔 25 分）

說明：第 8 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項者不給分。

8. 設 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π 之間。已知

$$|\cos \theta_1| = |\cos \theta_2| = |\cos \theta_3| = |\cos \theta_4| = \frac{1}{3}, \text{ 請問下列哪些選項是正確的?}$$

(1) $\theta_1 < \frac{\pi}{4}$

(2) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$

(3) $\cos \theta_3 = -\frac{1}{3}$

(4) $\sin \theta_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(5) $\theta_4 = \theta_3 + \frac{\pi}{2}$

9. 下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3 + x - 1 = 0$

(2) $2^x + 2^{-x} = 0$

(3) $\log_2 x + \log_x 2 = 1$

(4) $\sin x + \cos 2x = 3$

(5) $4\sin x + 3\cos x = \frac{9}{2}$

10. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 1$
- (2) 如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數
- (3) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數
- (4) $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$ (n 為正整數)
- (5) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數 (n 為正整數)

11. 坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 $2x - y = 2$ 上通過點 $(2, 2, 2)$ 的一直線。請問下列哪些選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

- (1) $(2, 2, 2)$
- (2) $(2, 0, 2)$
- (3) $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right)$
- (4) $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2\right)$
- (5) $\left(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

12. 想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

- (1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例
- (2) 在 95% 的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為 $[0.48, 0.56]$ (計算到小數點後第二位，以下四捨五入)
- (3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數
- (4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例 $\hat{p}$ 介於 0.52 與 0.59 之間
- (5) 如果不區分性別，此次抽樣 $\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 介於 0.02 與 0.04 之間

第貳部分：選填題（佔 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (13–32)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中點 A 的坐標為 $(2,1)$ ，點 B 的坐標為 $(8,2)$ ，點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則點 D 的坐標為 (13 , 14)。

- B. 設 $f(x)$ 為滿足下列條件的最低次實係數多項式： $f(x)$ 最高次項的係數為 1，且 $3-2i$ 、 i 、5 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解（其中 $i^2=-1$ ）。則 $f(x)$ 之常數項為 15 16 17。

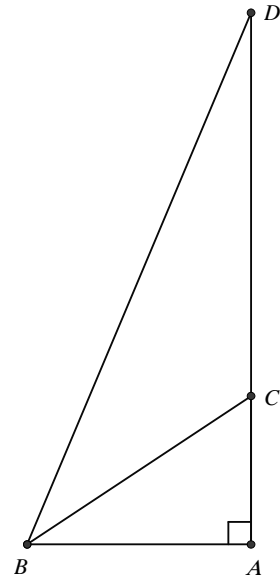
- C. 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 18 19 20 種。

- D. 設實數 $a > 0$ 。若 x 、 y 的方程組
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = a \\ x - ay = 122 \end{cases}$$
 有解，則 $a =$ 21 22。

E. 如右圖，直角三角形 ABD 中， $\angle A$ 為直角， C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。

已知 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\angle ABD = 2\angle ABC$ ，則

$$\overline{BD} = \frac{\textcircled{23} \textcircled{24}}{\textcircled{25}} \text{。 (化成最簡分數)}$$



F. 設 a 、 b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 與 x 軸交於 P 、 Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 7$ 。

若拋物線 $y = x^2 + ax + (b + 2)$ 與 x 軸的兩交點為 R 、 S ，則 $\overline{RS} = \sqrt{\textcircled{26} \textcircled{27}}$ 。

G. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$ 且 $\angle A = 2\angle C$ ，則 $\overline{AC} = \frac{\textcircled{28}}{\textcircled{29}}$ 。(化成最簡分數)

H. 坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4}, 2)$ 、直線 $L: y = -5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2 = 8y$ 。以 $d(P, L)$ 表示點 P 到直線 L 的

距離。若點 P 在 Γ 上變動，則 $|d(P, L) - \overline{AP}|$ 之最大值為 $\frac{\textcircled{30} \textcircled{31}}{\textcircled{32}}$ 。(化成最簡分數)

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$
首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 算術平均數： $\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
(樣本)標準差：
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\bar{X}^2 \right)}$$
- 95% 信心水準下之信賴區間：
$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$