

考試別：身心障礙人員考試

等別：三等考試

類科：電力工程

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉氏轉換 (Laplace transform) 求解：（10 分）

$$y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} -2, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}; y(0) = y'(0) = 0, \text{ 其中 } y' \equiv \frac{dy}{dt}, y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2}。$$

二、考慮下列之動態系統：（每小題 5 分，共 10 分）

$$x(k+1) = Ax(k), \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

(一)試建構矩陣 A 之一組特徵基底 (eigenbasis)。

$$(二) \text{若 } x(0) = \begin{bmatrix} 1250 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}, \text{ 試求其穩態值, 即 } \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = ?$$

三、隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^3 e^{-\lambda x}, & 0 \leq y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 試求: (每小題 5 分, 共 15 分)}$$

(一)邊際機率密度函數 (marginal probability density function) $f_X(x) = ?$

(二) $f_{Y/X}(y/x) = ?$

(三)機率 $P(Y \leq 0.1 | X = 0.5)$ 為何?

四、施力 $\vec{F} = 3y\vec{i} + 3x\vec{j} + 2z\vec{k}$ 沿著路徑 C 由點 $P(1,2,3)$ 出發，作用至點 $Q(2,-1,4)$ 為止，

其中路徑 C 為連接 P 點與 Q 點的直線。（每小題 5 分，共 15 分）

(一)列出路徑 C 之參數表示式 (parametric representation) $\vec{r}(t)$ 。

(二)依上述之參數表示式，算出施力 $\vec{F}$ 於路徑 C 中所作的功 (work)： $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 。

(三)已知此向量 $\vec{F}$ 可以用「純量 $f(x,y,z)$ 的梯度 (gradient)」表示之，試找出 $f(x,y,z)$ 。

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：4307

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 $\mathbf{F}$ ， $\mathbf{G}$ ， $\mathbf{H}$ 為向量， α ， β 為常數，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{F}$

(B) $(\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \mathbf{H} = \mathbf{F} + (\mathbf{G} + \mathbf{H})$

(C) $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \mathbf{G} \times \mathbf{F}$

(D) $(\alpha\beta)\mathbf{F} = \alpha(\beta\mathbf{F})$

2 向量場 $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (zx - \sin(y))\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ 在點 $P = (-1, 0, 1)$ 的散度 (divergence) 為何？

(A) $-\sqrt{2}$

(B) -1

(C) 1

(D) $\sqrt{10}/3$

3 若 $\mathbf{A}$ 為一向量， f 為一純量，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(B) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(C) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla f$

(D) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \times \nabla f + f \nabla \times \mathbf{A}$

4 $\mathbf{F}$ 為一曲線之位置函數。若 $\mathbf{F}$ 為二次可微分，則其曲度 (curvature) 可寫成：

(A) $\frac{\|\mathbf{F}' \times \mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|}$

(B) $\frac{\|\mathbf{F}' \times \mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^2}$

(C) $\frac{\|\mathbf{F}' \times \mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^3}$

(D) $\frac{\|\mathbf{F}' \times \mathbf{F}''\|}{\|\mathbf{F}'\|^{3/2}}$

5 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ ， $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ ，求行列式 $|f(\mathbf{A})|$ 之值為何？

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 6

6 若矩陣 $\mathbf{A}$ 的特徵值 (eigenvalue) 為 $1, -1, 1$ ，且 $\mathbf{I}$ 代表單位矩陣，則 $(2\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ 特徵值為何？

(A) $8, 2, 8$

(B) $9, 1, 9$

(C) $7, -1, 10$

(D) $1, -1, 1$

7 下列敘述何者正確？

(A) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可以被對角化

(B) 令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 則 $\mathbf{A}$ 對應 $\mathbf{x}$ 的特徵值為 1

(C) 令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 則 $\mathbf{A}$ 的特徵值為 4, 2, -2

(D) 令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 則 $\mathbf{A}$ 的特徵值為 4, -2, -2

8 級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3i)^n$ 之收斂半徑 R 之值為何？（其中 $i = \sqrt{-1}$ ）

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) 4

9 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z+2|=3$, 試求積分 $\int_C \frac{1}{(z+4)z^3} dz$ 為何？

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) 0

(C) 1

(D) $\frac{\pi i}{32}$

10 已知複數數列 $\{z_n\}$ 及 $\{\hat{z}_n\}$ 皆為收斂，且其極限值（limits）分別為 c 及 $\hat{c}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A) 數列 $\{z_n + \hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c + \hat{c}$

(B) 數列 $\{z_n \hat{z}_n\}$ 為收斂，且其極限值為 $c \hat{c}$

(C) 若 $\{z_n\} = \{k\hat{z}_n\}$ ，則 $c = k\hat{c}$ ，其中 k 為任意實數

(D) 若 $c = \hat{c}$ ，則 $\{z_n\} = \{\hat{z}_n\}$

11 若 $y = ax^m + bx^n$ 為 $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ 之解，且 $m \neq n$ ，則 $m+n$ 之值為何？其中 a, b, m, n 為常數， $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ，

$y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(A) -6

(B) -2

(C) -1

(D) 1

12 $\frac{dy}{dx} = e^y + \sin x$, $y(0) = 0$ 。以 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 解之，則 $\sum_{n=0}^2 a_n = ?$

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{5}{2}$

- 13 下列何者為微分方程式 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$ 的解？其中 C_1 及 C_2 為任意常數， $J_\nu(x)$ 及 $Y_\nu(x)$ 分別為第一類型及第二類型之 ν 階 Bessel 函數。
- (A) $C_1 J_1(\frac{x}{3}) + C_2 Y_1(\frac{x}{3})$ (B) $C_1 J_{\frac{1}{3}}(x) + C_2 Y_{\frac{1}{3}}(x)$
(C) $C_1 J_1(x - \frac{1}{3}) + C_2 Y_1(x - \frac{1}{3})$ (D) $C_1 J_{\frac{1}{3}}(x - \frac{1}{3}) + C_2 Y_{\frac{1}{3}}(x - \frac{1}{3})$
- 14 $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\alpha) e^{t-\alpha} d\alpha$ ，則 $f(t) = ?$
- (A) $t^3 + 2t^2 - e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$ (B) $t^3 + 3t^2 + e^{-t} - 2te^{-t}$ (C) $-t^3 + 3t^2 + 1 - 2e^{-t}$ (D) $-t^3 - 2e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$
- 15 令 $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$ ，而 $f(t) = L^{-1}(F(s))$ ，則 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 之值為何？
- (A) 0 (B) $\frac{1}{18}$ (C) 1 (D) ∞
- 16 下列何者為線性微分方程式？
- (A) $x^2 y'' + e^y = 2x$ (B) $x^2 y'' + 2xy' + y = e^x$
(C) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ (D) $(\frac{dy}{dx})^3 + xy = 4$
- 17 4 個家庭，每個家庭皆有 3 個小孩，試求至少有 3 個家庭剛好擁有 2 個女孩之機率為何？（假設小孩是男孩或女孩的機率各為 $\frac{1}{2}$ ）
- (A) $\frac{135}{1024}$ (B) $\frac{621}{4096}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$
- 18 二枚錢幣投擲出現正面之機率分別為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{5}$ ，若隨機選擇出一枚錢幣並投擲二次，試求二次皆出現正面之機率為何？
- (A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{17}{225}$ (D) $\frac{4}{15}$
- 19 一容器中有 10 顆完全一樣的球分別標示為 0, 1, 2, ..., 9，隨機從容器中取出一顆球並記下其標示之號碼，該號碼為奇數或 3 的倍數之機率為何？
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
- 20 令隨機變數 X 的累積分布為 $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{當 } x < 0 \\ 2/7, & \text{當 } 0 \leq x < 1 \\ 6/7, & \text{當 } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{當 } 2 \leq x \end{cases}$ ，請問下列敘述何者錯誤？
- (A) $P(0 < x \leq 2) = 5/7$ (B) $P(X = 1) = 4/7$ (C) $P(X \leq 0) = 2/7$ (D) $P(X \leq 1) = 2/7$