

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉普拉斯轉換法解微分積分方程式 $\frac{dy}{dt} - 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 4t^3 e^{3t}$, $y(0) = 0$ 。(15 分)

二、令 $A = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \lambda_2 & 1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1 + \lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1 + \lambda_n a_n \end{bmatrix}$ 。求解 A 的反矩陣 (inverse matrix)。(10 分)

三、試找出一平面 $Ax + By + Cz = D$, $D \neq 0$ 上距離原點 $(0,0,0)$ 最近一點之座標。(10 分)

四、投擲十顆公平的骰子，其中五顆為藍色骰子而另五顆為綠色骰子，試求下列事件之機率：

(一)剛好二顆藍色骰子皆為 6 點且剛好三顆綠色骰子皆為偶數點數。(7 分)

(二)藍色骰子出現 6 點之數量同於綠色骰子出現 6 點之數量。(8 分)

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：2265

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 定義曲線 C 為 $x = t$, $y = t$ 及 $z = t^2$ ，其中 $0 \leq t \leq 2$ ，求函數 $\varphi(x, y) = x + y$ 沿曲線 C 之線積分。

(A) 8

(B) $32/3$

(C) $8\sqrt{2}$

(D) $26\sqrt{2}/3$

2 設 f 和 g 為可微分 (differentiable) 純量函數， $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 為可微分向量函數，則有關它們的梯度 (gradient)、散度 (divergence) 與拉普拉斯算子 (Laplace operator) 的等式，下列何者錯誤？

(A) $\text{div}(f\mathbf{v}) = f \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$

(B) $\text{div}(f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$

(C) $\nabla^2 f = \text{div}(\nabla f)$

(D) $\nabla^2(fg) = g \nabla^2 f + f \nabla^2 g$

- 3 令向量函數 $\mathbf{F} = [y^2, z, x^2]$ ，曲線 C 為螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$ 從 $(2, 0, 0)$ 到 $(-2, 0, \pi)$ ，則線積分 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt$ 之值為何？
- (A) $[\pi, \frac{1}{2}\pi^2, \pi]$ (B) $[\pi, \pi^2, \pi]$
(C) $[2\pi, \frac{1}{2}\pi^2, 2\pi]$ (D) $[2\pi, \pi^2, 2\pi]$
- 4 令 u, v, w 為空間中向量，則下列敘述何者錯誤？
- (A) $u \cdot (u \times w) = 0$
(B) $u \cdot (v \times w) = (w \times u) \cdot v$
(C) $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$
(D) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- 5 設 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則其反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特徵值之積為何？
- (A) -3 (B) 3 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
- 6 一個矩陣 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ，則以下何者不是其特徵向量 (eigenvector)？
- (A) $\mathbf{x} = (2, -4, 6)$ (B) $\mathbf{x} = (2, 0, 6)$
(C) $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$ (D) $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)$
- 7 有關正交矩陣 (orthogonal matrices) $\mathbf{A}$ 的特性，下列何者錯誤？
- (A) $\mathbf{A}$ 的行向量 (column vector) 都互為正交
(B) $\mathbf{A}$ 的列向量 (row vector) 都互為正交
(C) $\mathbf{A}$ 的行列式值 (determinant) 為 1 或 -1
(D) $\mathbf{A}$ 的特徵值 (eigenvalues) 全為實數
- 8 下列選項何者為 $e^z = 1+2i$ 的一解，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
- (A) $\frac{1}{2}\ln(2) + i \tan^{-1}(5)$
(B) $\frac{1}{2}\ln(5) + i \tan^{-1}(2)$
(C) $\ln(2) + i(1/2)\pi$
(D) $\ln(5) + i(1/2)\pi$

- 9 令 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 為矩陣 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-i \\ 1 & 0 & -i \\ 1+i & i & 2 \end{pmatrix}$ 的特徵值 (eigenvalues)，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，試問下列何者正確？
- (A) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + i$
- (B) $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 1 - i$
- (C) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$
- (D) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$
- 10 針對複數冪級數 (complex power series) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} (z-2i)^n$ 的敘述，下列何者正確？
- (A) 此冪級數僅在 $z = 2i$ 收斂
- (B) 此冪級數在 $|z-2i| < 1/27$ 的開放圓 (open disk) 內為收斂
- (C) 此冪級數在 $|z-2i| < 27$ 的開放圓內為收斂
- (D) 此冪級數在所有複數 z 均收斂
- 11 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z| = 2$ ，試求積分 $\int_C ze^{\frac{1}{z}} dz$ 為何？
- (A) 0 (B) πi (C) 1 (D) $2\pi i$
- 12 下列何項常微分方程式之 $x = 0$ 為不規則奇點 (irregular singular point)？
- (A) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ (B) $x^2 y'' + \sin x \cdot y = 0$
- (C) $x^5 y'' + 4x^4 y' + 2y = 0$ (D) $4xy'' + 2y' - y = 0$
- 13 設微分方程式 $y' + ay = 4e^{-2x}$, $y(0) = y_0$ 的解 $y(x)$ 的拉式轉換為 $Y(s) = \frac{-s+2}{s^2+6s+8}$ ，試求常數 a 及 y_0 ，並判定下列何者正確？
- (A) $a + y_0 = 4$ (B) $a + y_0 = 3$
- (C) $a + y_0 = 2$ (D) $a + y_0 = 1$

- 14 已知 $\mathcal{L}[\sin(\omega t + \phi)] = \frac{\omega \cos \phi + s \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$ ，以下何者為 $\mathcal{L}[\cos(\omega t + \phi)]$ ？
- (A) $\frac{\omega \sin \phi + s \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$ (B) $\frac{s \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$
(C) $\frac{\omega \cos \phi - s \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$ (D) $\frac{s \cos \phi - \omega \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$
- 15 試找出微分方程式 $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$ 之特徵值 (eigenvalues) $\lambda_m (m = 1, 2, 3, \dots)$ ？
- (A) $\lambda_m = (\frac{mL}{2\pi})^2$ (B) $\lambda_m = (\frac{m\pi}{L})^2$
(C) $\lambda_m = (\frac{2m\pi}{L})^2$ (D) $\lambda_m = (\frac{mL}{\pi})^2$
- 16 下列何者不可能是微分方程式 $y'' + Ay' + By = 0$ 的解？其中 A 和 B 為常數。
- (A) x^2 (B) e^{3x+4} (C) $e^2 + x$ (D) $e^{2x} \cos(3x + 4)$
- 17 有一個週期為 L 的函數 $f(x) = x^2, 0 < x < L$ ，展開成 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)$ ，請問 b_n 為何？
- (A) $\frac{L}{n\pi}$ (B) $\frac{L^2}{n\pi}$ (C) $\frac{-L^2}{n\pi}$ (D) $\frac{-L}{n\pi}$
- 18 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數 (joint probability mass function) 為：
- $$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y), & \text{if } (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
- ，試問下列何者正確？
- (A) $\text{Var}(Y) = \frac{1}{10}$ (B) $\text{Var}(Y) = \frac{1}{4}$
(C) $\text{Var}(Y) = \frac{21}{100}$ (D) $\text{Var}(Y) = \frac{23}{100}$
- 19 二枚錢幣出現正面之機率分別為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ ，同時投擲該二枚錢幣連續 3 次，試求二枚錢幣皆出現正面剛好 2 次之機率為何？
- (A) $\frac{1}{72}$ (B) $\frac{5}{72}$ (C) $\frac{3}{32}$ (D) $\frac{5}{36}$
- 20 假設 50 歲以上的成年人罹患癌症的機率為 0.05，而醫生將患有癌症病患成功篩檢出來的機率為 0.78，但是將沒有患病的成年人錯誤篩檢為有癌症的機率為 0.06。請問針對此癌症篩檢來說，一位 50 歲以上的成年人會被檢測出他有癌症的機率為何？
- (A) 0.039 (B) 0.096 (C) 0.057 (D) 0.05