

考試別：調查人員
等 別：三等考試
類 科 組：電子科學組
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、我們考慮一個雙變數純量場 (scalar field)： $f(x, y) = x \cdot e^{-xy}$ 。

(一) $f(x, y)$ 在 $(1, -3)$ 這個點上面的梯度 (gradient) 為何？(8 分)

(二) $f(x, y)$ 在 $(1, -3)$ 這個點上面沿著 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$ 這個單位向量之方向的方向
導數(directional derivative)為何？(7 分)

二、考慮一個矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。

(一)請算出 A 的簡化列階梯形式 (reduced row echelon form)。(5 分)

(二)請算出 A 之所有特性值 (eigen-values)。(6 分)

(三)針對每一個特性值，請找出對應之特性向量 (eigen-vectors)。(9 分)

(四) A 是一個可對角化 (diagonalizable) 的矩陣嗎？(4 分)

(五)有一個列向量 (row vector) y ，已知它合乎這個方程式所描述的條件：
 $y \cdot A = [3 \ 2 \ -1]$ 。請問， $y = ?$ (6 分)

三、我們考慮一個二階常係數微分方程式： $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = t^2$ ，其初始
條件為： $y(0) = 2, y'(0) = -1$ 。

(一)請寫出此微分方程式之齊次解 (homogeneous solution) 的一般形式。(6 分)

(二)請找出此微分方程式的一個特定解 (particular solution)。(6 分)

(三)請找出此微分方程式 (含初始條件) 之完整解 (complete solution)。(8 分)

四、有一個公平的骰子，我們對它作了 10 次投擲；我們用 A 代表其中投擲結果為奇數點（亦即 1 或 3 或 5）的次數，用 B 代表其中投擲結果為偶數點（亦即 2 或 4 或 6）的次數。

(一) A 與 B 是否為互相獨立(independent)的隨機變數(random variable)？(4 分)

(二)請計算下列機率： $\text{Prob}(A > B + 3) = ?$ (8 分)

(三)請計算 A^2 的期望值(expectation)： $E(A^2) = ?$ (8 分)

五、考慮一個複變函數： $f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{z-(1+i)} + 5z^2$ ($i = \sqrt{-1}$)。

在本題目中，我們探討 $f(z)$ 在一些封閉曲線上作線積分(line integral)的問題。假設線積分的方向為正向環繞(in positive orientation，也就是逆時鐘旋轉)。(每小題 5 分，共 15 分)

(一)假設 $C_1: |z| = \frac{2}{5}$ (亦即在複變平面上以原點為中心，以 $\frac{2}{5}$ 為半徑作出的圓)。試求出， $\oint_{C_1} f(z) dz = ?$

(二)假設 $C_2: |z| = \frac{4}{5}$ 。試求出， $\oint_{C_2} f(z) dz = ?$

(三)假設 $C_3: |z| = \frac{6}{5}$ 。試求出， $\oint_{C_3} f(z) dz = ?$