

類 科：統計
科 目：統計學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、人工智慧的興起，帶動了市場對晶片需求量的飆升，也連帶促成相關產業的蓬勃發展。已知國內有某家公司專門生產晶片半導體製程中使用的圓形光罩。今由此公司之生產線隨機抽檢 n 筆光罩樣本並測量其半徑。若已知因某些特定原因造成該公司測量儀器不精準，測量之觀測值會有誤差，令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 表其觀測誤差。假設觀測誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 彼此相互獨立且服從平均數為 1，變異數為 σ^2 之常態分配，並令 θ 為此圓形光罩的真實半徑。令變數 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 為此 n 筆樣本之半徑的觀測值，則 $Y_i = \theta + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。令 $F(y)$ 為變數 Y_i 之累積分配函數 (cumulative distribution function)。(每小題 10 分，共 80 分)

(一)求出機率 $P\left(\left|\frac{F(Y_1)}{F(Y_2)} - 1\right| \leq 0.5\right)$ 。

(二)求出條件機率 $P(F(Y_2) > F(Y_1) | F(Y_2) \geq 0.5)$ 。

(三)假設 θ 和 σ^2 皆未知，請利用觀測值 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 求出此光罩半徑 θ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

(四)假設 θ 和 σ^2 皆未知，請利用觀測值 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 求出此光罩面積 $\pi\theta^2$ 之均勻最小變異不偏估計量 (uniformly minimum variance unbiased estimator)。

(五)假設 θ 和 σ^2 皆未知，請求出光罩半徑 θ 之信賴水準 $100(1-\alpha)\%$ 的信賴區間。

(六)若該公司有兩條獨立作業的生產線，且已知此兩條生產線所生產之光罩的瑕疵率皆為 λ 。令變數 S_i 為第 i 條生產線上檢測產品直到檢測出第一個瑕疵品前所需的檢測 (良品) 次數， $i = 1, 2$ ，請求出機率 $P[S_1 = S_2]$ 。

(七)續題(六)，令變數 $U = \text{Min}\{S_1, S_2\}$ 代表取 S_1, S_2 之最小值，請求出 U 之機率密度函數 $f(u)$ 。

(八)求出題(七)之變數 U 的期望值 $E(U)$ 。

二、臺灣量子國家隊已成軍 5 年，去年突破技術瓶頸，成功自製出 5 量子位元之超導量子電腦，象徵著臺灣的量子時代來臨。已知團隊開發的量子電腦有一個核心的元件，此核心元件是由三個電路組件串聯及並聯構成。令變數 T_1, T_2, T_3 分別代表此三個電路組件的壽命，此核心元件是先由第一及第二個電路組件串聯後，再和第三個電路組件並聯而成，因此整個核心元件的壽命是 $X = \text{Max}\{\text{Min}\{T_1, T_2\}, T_3\}$ ，此處 $\text{Max}\{a, b\}$ 代表取 a, b 之最大值， $\text{Min}\{a, b\}$ 代表取 a, b 之最小值。假設此三個電路組件的壽命彼此相互獨立，皆服從具有平均數為 2 之指數分配。(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 求出變數 X 之機率密度函數 $f(x)$ 。

(二) 求出變數 X 之變異數 $\text{Var}(X)$ 。