

代號：33970
34070
頁次：4-1

102年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小平方解 (least squares solution)，其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ 。
(10 分)

二、利用留數 (residue) 觀念，試求 $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 之值。(10 分)

三、若 C 為從 $(1, 1, 1)$ 到 $(-2, 1, 3)$ 之直線段，且 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，求 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ 。
(15 分)

四、已知 $f(x) = x, 0 < x < 2\pi$ 且 $f(x) = f(x + 2\pi)$ ，求 $f(x)$ 之傅立葉半幅正弦展開式。
(15 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：7339

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為拋物柱面 $z = x^2$ 之位置向量參數表示式，其中 u, v 為變數？

- (A) $u\mathbf{i} + u\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (B) $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (C) $v\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (D) $v\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$

2 下列何者為 $\oint_C 2x \cos(2y)dx - 2x^2 \sin(2y)dy$ 之值，其中 C 為一圓： $x^2 + y^2 = 4$ （定義逆時針方向為正）？

- (A) $-3\sqrt{2}$ (B) 0 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{7}$

3 試求向量場 $\mathbf{v} = \sinh(x-z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z-y^2)\mathbf{k}$ 的 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ 值？

- (A) -2 (B) 0 (C) $\sinh(x-z)$ (D) $2y$

4 有一矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則以下何者為行列式 $\det(B^5)$ 的值？

- (A) 1 (B) 5 (C) 32 (D) -32

5 下列矩陣何者非屬基本矩陣（elementary matrices）？

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 在螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, 4t]$ 之上，從點 P: (3, 0, 0) 到點 Q: $(-3, 0, 20\pi)$ 的弧線長（arc length）為何？

- (A) 20π (B) 25π (C) 30π (D) 40π

7 以下那一組是由基底 $\mathbf{B} = \{[3 \ 4], [1 \ 0]\}$ 經由 Gram-Schmidt 正交程序轉換而成的正交基底？

- (A) $\left\{ [3 \ 4], \left[\frac{1}{3} \ \frac{-1}{4} \right] \right\}$ (B) $\left\{ [3 \ 4], \left[\frac{15}{24} \ \frac{-15}{32} \right] \right\}$
 (C) $\left\{ [3 \ 4], \left[\frac{16}{25} \ \frac{-12}{25} \right] \right\}$ (D) $\left\{ [3 \ 4], \left[\frac{-8}{22} \ \frac{6}{22} \right] \right\}$

8 令矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ，試問下列何者不是 A 的特徵向量（eigenvector）？

- (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

9 令 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 爲一複數級數 (complex series)，則下列敘述何者錯誤？

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 收斂

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 發散

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$

(D) 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n|$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 亦收斂

10 有關複數的性質，何者錯誤？

(A) 一個複數的實部 (real part) 是實數

(B) 一個複數的虛部 (imaginary part) 是實數

(C) $|z| + |w| \geq |z + w|$ ，其中 z, w 爲複數

(D) $z\bar{z} = z^2$ ，其中 z 爲複數

11 令 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 爲一複數冪級數 (complex power series)，其中常數 z_0 爲此級數展開式的中心點 (center)。若已知此冪級數的收斂半徑爲 R ，則下列敘述何者錯誤？

(A) 此冪級數在中心點 $z = z_0$ 必定收斂

(B) 此冪級數在所有符合 $|z - z_0| < R$ 的複數 z 皆收斂

(C) 此冪級數在所有符合 $|z - z_0| > R$ 的複數 z 皆發散

(D) 此冪級數在所有符合 $|z - z_0| = R$ 的複數 z 皆收斂或皆發散

12 一微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ ，下列何者錯誤？

(A) 該方程式爲線性微分方程式

(B) 該方程式爲白努利方程式 (Bernoulli equation)

(C) $y = e^{2x} + ce^x$ 爲該方程式之解

(D) 該方程式爲齊次 (homogeneous) 微分方程式

13 若微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x + x - x^2$ 之特別解 (particular solution) 爲 $y_p = a + bx + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}e^x$ ，求 $a + b$ 值？

(A) $\frac{2}{27}$

(B) $-\frac{2}{27}$

(C) $-\frac{1}{27}$

(D) 0

14 兩個函數 $f_1 = \sin^2 x$ ， $f_2 = 1 - \cos 2x$ ， $x \in (-\infty, \infty)$ ，請問下列何者錯誤？

(A) 它們不是線性相依

(B) 它們的 Wronskian 爲 0

(C) 它們不是線性獨立

(D) 它們的 Wronskian 爲 $\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \sin x \cos x & 2 \sin 2x \end{vmatrix}$

- 15 下列何者為函數 $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{當 } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{當 } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 之傅立葉級數？

(A) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} \sin nx$

(B) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} \cos nx$

(C) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin nx$

(D) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \cos nx$

- 16 如微方程式 $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ 有一僅有 y 的函數之積分因子 (integrating factor)，下列何者恆真？

(A) $\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$ 也是僅有 y 的函數

(B) $\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} \right)$ 也是僅有 y 的函數

(C) $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$ 也是僅有 y 的函數

(D) $\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial y} \right)$ 也是僅有 y 的函數

- 17 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，令 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$ ，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數：

(A) $te^{-3(t-2)}u(t-2)$

(B) $(t-2)e^{-3t}u(t-2)$

(C) $(t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$

(D) $te^{-3t}u(t-2)$

- 18 假設隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，試求出 k 的值為何？

(A) 1/2

(B) 2/3

(C) 3/2

(D) 1

- 19 自一副 52 張撲克牌中取出 3 張牌，試求取出之牌中出現多於 1 張 K 之機率為何？

(A) $\frac{53}{5525}$

(B) $\frac{73}{5525}$

(C) $\frac{93}{5525}$

(D) $\frac{113}{5525}$

- 20 給定一個隨機變數 X ，其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ ；試問一個隨機變數 $Y = X^2$ ，其機率密度函數 $g(y)$ 為何？

(A) $g(y) = \frac{(1+\sqrt{y})}{2}, \quad 0 < y < 1$

(B) $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1$

(C) $g(y) = \frac{(1-\sqrt{y})}{2}, \quad 0 < y < 1$

(D) $g(y) = 1, \quad 0 < y < 1$