

大學入學考試中心

106 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答

案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1 ，而學生玩過的比率為 r_2 ，其中 $r_1 \neq r_2$ 。由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。

(1) 全校老師與學生比率 (2) 全校老師人數 (3) 全校學生人數
(4) 全校師生人數 (5) 全校師生玩過「寶可夢」人數

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

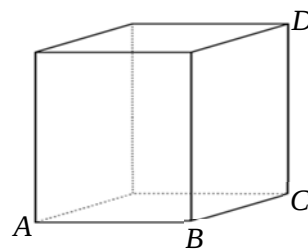
(1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81

3. 設 $\Gamma: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 ℓ 。考慮動點 (t, t^2) ，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選出正確的選項。

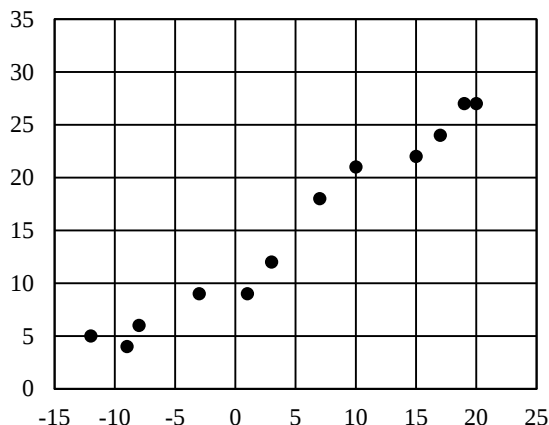
(1) 此動點不會碰到 Γ ，也不會碰到 ℓ
(2) 此動點會碰到 Γ ，但不會碰到 ℓ
(3) 此動點會碰到 ℓ ，但不會碰到 Γ
(4) 此動點會先碰到 Γ ，再碰到 ℓ
(5) 此動點會先碰到 ℓ ，再碰到 Γ

4. 在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A, C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B, D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B, D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。

(1) 兩質點的距離固定不變
(2) 兩質點的距離越來越小
(3) 兩質點的距離越來越大
(4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
(5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大



5. 下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散佈圖。



今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖。試依此選出正確的選項。

- (1) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
 - (2) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
 - (3) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
 - (4) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
 - (5) 最高溫與溫差為零相關
6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \leq \cos x$?
- (1) 0 個
 - (2) 1 個
 - (3) 2 個
 - (4) 4 個
 - (5) 無窮多個
7. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
- (甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
 - (乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
- 根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
- (1) 52
 - (2) 60
 - (3) 68
 - (4) 76
 - (5) 84

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設 m, n 為小於或等於 4 的相異正整數且 a, b 為非零實數。已知函數 $f(x) = ax^m$ 與函數 $g(x) = bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項。

- (1) m, n 皆為偶數且 a, b 同號
- (2) m, n 皆為偶數且 a, b 異號
- (3) m, n 皆為奇數且 a, b 同號
- (4) m, n 皆為奇數且 a, b 異號
- (5) m, n 為一奇一偶

9. 設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0, 0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2, 6)$ 在 Γ 的內部。請選出正確的選項。

- (1) Γ 的圓心不可能在第二象限
- (2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10
- (3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10
- (4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於 10
- (5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

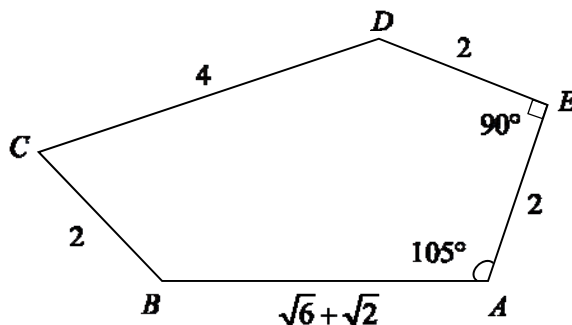
10. 坐標空間中有三直線 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ ， $L_2: \begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$ ， $L_3: \begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$ ， t 為實

數。請選出正確的選項。

- (1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直
- (2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直
- (3) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2
- (4) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3
- (5) 有一個平面同時包含 L_2 與 L_3

11. 最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$ ，其示意圖如下。
關於這五邊形，請選出正確的選項。

- (1) $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$
- (2) $\angle DAB = 45^\circ$
- (3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$
- (4) $\angle ABD = 45^\circ$
- (5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$



12. 某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

- (1) $x + y = 39$
- (2) $y \leq 11$
- (3) 三科中至少有一科不及格的學生有 $39 - x + y$ 人
- (4) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人
- (5) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人

13. 空間中有一四面體 $ABCD$ 。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

- (1) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overline{DA}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- (2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
- (3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角
- (4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
- (5) 若 $\overline{AB} < \overline{DA}$ 且 $\overline{AC} < \overline{DA}$ ，則 $\angle BDC$ 是銳角

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14–34）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$ ，其中 $n \geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 12$ ，則 $a_5 = \underline{\textcircled{14} \textcircled{15}}$ 。

B. 在坐標平面上， $\triangle ABC$ 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP} = (\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$ 及 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ 。若 A, P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M ，則 $\overrightarrow{AM} = (\frac{\textcircled{16} \textcircled{17}}{\textcircled{18} \textcircled{19}}, \frac{\textcircled{20} \textcircled{21}}{\textcircled{22} \textcircled{23}})$ 。（化成最簡分數）

C. 若 a 為正整數且方程式 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1 = 0$ 的根都是有理根，則 $a = \underline{\textcircled{24}}$ 。

D. 設 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組
$$\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k + 1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k - 5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k + 9 \end{cases}$$
 有解，則 $k = \underline{\textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。

- E. 設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$ 。若用內插法從 $\log a, \log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b = \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3),$$

則 x 的值為 ②⑦ ②⑧。

- F. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共

跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為 $\frac{\textcircled{29}}{\textcircled{30} \textcircled{31}}$ 。(化成最簡分數)

- G. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 ③② ③③ . ③④ 公尺。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積 $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$