

大學入學考試中心
九十九學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

（一）單選題只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到－，±以及 6，7，8，9，0 等格子；多選題只用 1，2，3，4 等四個格子，而不需要用到－，±以及 5，6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 $\boxed{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$	

例：若第 6 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 6 列的 $\boxed{1}$ 與 $\boxed{3}$ 劃記，如：

6	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$	
---	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	---------------	--

（二）選填題的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\boxed{-}$ 與第 21 列的 $\boxed{7}$ 劃記，如：

20	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$	
21	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$	

祝考試順利

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共佔 74 分）

一、單選題（30 分）

說明：第 1 至 5 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 向量 $(2, -1)$ 與下列哪一個向量之夾角（介於 0° 與 180° 之間）為最小？

- (1) $(-1, -\sqrt{2})$
- (2) $(-\sqrt{2}, 1)$
- (3) $(-1, \sqrt{2})$
- (4) $(1, \sqrt{2})$
- (5) $(\sqrt{2}, 1)$

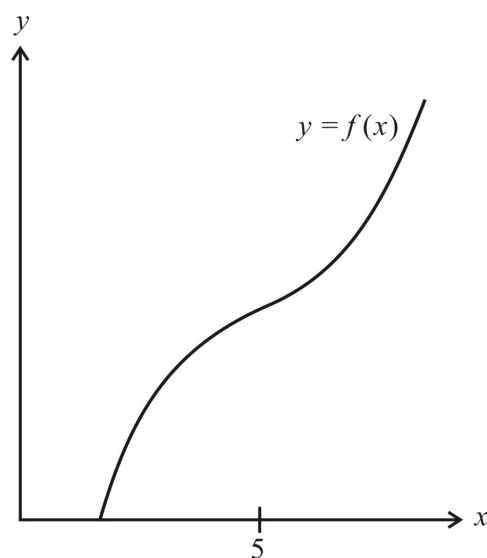
2. 不透明箱中置有編號分別為 1、2、3、6、8 的球各一顆。同時自箱中隨機取出三顆球，則此三球編號之和大於 14 的機率為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{3}{5}$

3. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數且行列式 $\det A = 1$ 。試問行列式 $\det(A - A^{-1})$ 之值為下列哪一個選項？

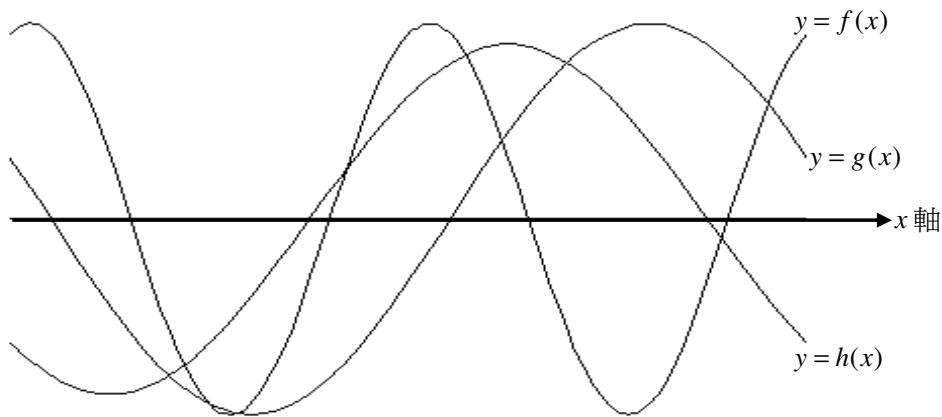
- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 4 (5) 16

4. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，右圖所示為函數 $y = f(x)$ 的圖形，其中 $(5, f(5))$ 為反曲點。試問 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 可能為下列哪一個選項？



- (1) $(x-5)^2 - 1$
- (2) $(x-5)^2 + 1$
- (3) $(x-5)^2$
- (4) $-(x-5)^2 + 1$
- (5) $-(x-5)^2 - 1$

5. 將函數 $y = 3\sin x - \cos x$ 、 $y = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $y = 2\sin x + 2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $y = h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？

- (1) $f(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $g(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $h(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (2) $f(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $h(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $g(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (3) $g(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $f(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $h(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (4) $g(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $h(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $f(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (5) $h(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $f(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $g(x) = 2\sin x + 2\cos x$

二、多選題（16 分）

說明：第 6 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分，每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

6. 設 a 、 b 、 c 分別為函數 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 、 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ 、 $h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}}$ 在 x 為任意正實數時的最小值。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $b = a^2$
- (2) $c = 2^{\frac{3}{4}}$
- (3) $f(x) + g(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $a + b$
- (4) $g(x) + h(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $b + c$

7. 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a^3 = 3$
- (2) $\log_{\sqrt{3}} a = \sqrt{3}$
- (3) $a > 1$
- (4) $a < 3^{\frac{1}{4}}$

三、選填題（28 分）

說明：A 至 D 題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8–20）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 當 n 為正整數時，令 $x = a_n$ 、 $y = b_n$ 、 $z = c_n$ 為三元一次聯立方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -2nx + ny + 3z = 8n \end{cases}$$
 之唯一解，

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\textcircled{8} \textcircled{9}}$ 。

B. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x) = 8x + 11$ ，且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 有局部極值，則 $f'(0) = \underline{\textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12}}$ 。

- C. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 5$ ， $\cos \angle ABC = -\frac{3}{5}$ ，且其外接圓半徑為 $\frac{13}{2}$ ，則 $\sin \angle BAC = \frac{\textcircled{13}\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。
(化成最簡分數)

- D. 一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有三份，活動直到三份獎品都被抽中為止。則在排第四位的人可以抽獎的情況下，排第五位的人可以抽獎的條件機率為 $\frac{\textcircled{17}\textcircled{18}}{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。(化成最簡分數)

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。各小題配分標於題末。

一、（13 分）設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為實係數三次多項式。已知原點 $(0,0)$ 為函數 $y = f(x)$ 的圖形之反曲點，且此圖形在原點的切線為 $y = -x$ 。

(1) 試求 b 、 c 、 d 。（5 分）

(2) 若 $a > 0$ 且 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 0$ 所圍的有界區域面積為 2，試求 a 。（8 分）

二、（13 分）設 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 54$ 為坐標空間中一球面； L 為坐標空間中通過點 $P(0, -6, 9)$ 且方向向量為 $(1, 4, -2)$ 的直線。

(1) 試求 L 與 S 的所有交點之坐標。（5 分）

(2) 在所有包含 L 的平面與 S 相交所得之圓中，面積最大值為何？（2 分）

(3) 在所有包含 L 的平面中，與 S 相交所得之圓面積最小者，其平面方程式為何？（6 分）