

114年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、
國家安全局國家安全情報人員、移民行政人員考試及
114年特種考試退除役軍人轉任公務人員考試試題

考試別：國家安全情報人員考試

等別：三等考試

類科組別：數理組（選試英文）

科目：線性代數

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、設線性方程組

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$$

利用此線性方程組的增廣矩陣 (augmented matrix)，以高斯消去法，求此方程組的解集合 (solution set)。(20 分)

二、設向量空間 P_n 為次數小於或等於 n 的實係數多項式。另設函數 $T: P_2 \rightarrow P_2$ 定義為

$$T(p(x)) = (x+1)p'(x) + p(x+2)$$

(一) 令 $\beta = \{1, x, x^2\}$ 和 $\gamma = \{x-1, x+1, x^2-x\}$ 為 P_2 的有序基底 (ordered basis)。求算 $[T]_\beta$ 及 $[T]_\gamma$ 。此處 $[T]_\beta$ 代表線性變換 T 相對於有序基底 β 的矩陣表示。(12 分)

(二) 求一個矩陣 C 使得 $[T]_\beta = C^{-1}[T]_\gamma C$ 。(8 分)

三、設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求一正交矩陣 (orthogonal matrix) P ，使得 $P^{-1}AP = D$

為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(25 分)

四、設 $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$ 為 $\mathbb{R}^4$ 的子空間。對於子空間 W ，使用格拉姆-施密特正交化法 (Gram-Schmidt orthogonalization)，找一正交基底 (orthogonal basis)。(20 分)

五、設 V 為一個向量空間，且令 $v_1, v_2 \in V$ 。

請證明 $\text{span}(\{v_1 - 2v_2, 2v_1 + 3v_2\}) = \text{span}(\{v_1 + v_2, 2v_1 - v_2\})$ 。(15 分)