

代號：34270
34370
頁次：4-1

103 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、令一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 $e^A = ?$ （15 分）

二、請用拉氏轉換（Laplace transform）解 $y'' + y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ，其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝函數（unit impulse function）。（10 分）

三、試求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x^2+4)} dx$ 之值。（10 分）

四、試應用留數定理（Residue Theorem）計算下列積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ 。（15 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：7342

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 橢圓 $x^2 + 4y^2 = 16$ 在點 $P:(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的單位切線為何？

(A) $x + 2y = 4\sqrt{2}$

(B) $x + 2y = 5\sqrt{2}$

(C) $2x + y = 4\sqrt{2}$

(D) $2x + y = 5\sqrt{2}$

2 設 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 均為可微分（differentiable）向量函數，則有關它們的散度（divergence）與旋度（curl）的等式，下列何者錯誤？

(A) $\text{div}(\text{curl } \mathbf{v}) = 0$

(B) $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \text{curl } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{curl } \mathbf{u}$

(C) $\text{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{curl } \mathbf{u} + \text{curl } \mathbf{v}$

(D) $\text{curl}(c\mathbf{v}) = c \text{curl}(\mathbf{v})$ （註： c 為一常數）

3 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 為三向量，則下列有關其內積（inner product）與外積（cross product）的敘述何者錯誤？

(A) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(B) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(C) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

(D) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4 圓錐曲面 $\phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ， x, y 不全為 0，在此圓錐曲面的 $(1, 1, \sqrt{2})$ 位置的相切平面為何？

(A) $x + y + \sqrt{2}z = 0$

(B) $x + y - \sqrt{2}z = 0$

(C) $-3x + y + \sqrt{2}z = 0$

(D) $x - 3y + \sqrt{2}z = 0$

5 一矩陣 $M = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列何者錯誤？

(A) M 不可對角化

(B) 其特徵多項式有重根

(C) 該矩陣有三個線性獨立（linear independent）的特徵向量（eigenvectors）

(D) 存在可逆矩陣 Q ，使得 $Q^{-1}MQ = D$ ， M 與 D 為相似矩陣（similar matrices）

6 令 A 和 B 皆為 $n \times n$ 矩陣，且 B 為可逆，則方陣跡數 $\text{Trace}(B^{-1}AB) = ?$

(A) $\text{Trace}(A)$

(B) $\text{Trace}(B^{-1}) \cdot \text{Trace}(A) \cdot \text{Trace}(B)$

(C) $\text{Trace}(B^{-1}) + \text{Trace}(A) + \text{Trace}(B)$

(D) $n + \text{Trace}(A)$

7 下列那一個向量不在矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 的列空間（row space）中？

(A) $(1, 1, 4)$

(B) $(2, 2, 8)$

(C) $(2, 1, 9)$

(D) $(3, 4, 2)$

8 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ，試求 $A^3 - 11A^2 + 3A + 25I$ ，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ？

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

9 下列選項何者為 e^z 於 $z = i$ 之泰勒展開式：

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-i)^n$

(B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (z-i)^n$

(C) $\sum_{n=0}^{\infty} e^i \frac{1}{n!} (z-i)^n$

(D) $\sum_{n=0}^{\infty} e^i \frac{1}{n!} (z-i)^{n+1}$

10 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z|=1$ ，試求積分 $\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz$ 為何？

(A) $\frac{4\pi i}{3}$

(B) $\frac{8\pi i}{3}$

(C) 0

(D) $\frac{2\pi i}{3}$

11 設複數 $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z^{31} 之值為何？

(A) 1

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 求 $\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$ 之反拉氏轉換為下列何者？

(A) $2t + 2te^t$

(B) $-2t + te^{-t}$

(C) $-2t - 2te^t$

(D) $-t + te^t$

13 函數 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega)$ ，下列那一個函數的傅立葉轉換為 $|F(\omega)|^2$ ？

(A) $g(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$

(B) $g(t) = \begin{cases} 2-|t|, & |t| < 2 \\ 0, & |t| \geq 2 \end{cases}$

(C) $g(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| < 2 \\ 0, & |t| \geq 2 \end{cases}$

(D) $g(t) = \begin{cases} 2-|t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$

14 $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 則 $y(1) = ?$

- (A) $\frac{25}{12e}$ (B) 2 (C) 4 (D) $\frac{2}{e}$

15 請求出 $d[\ln(x/y)]$ 之解為下列何者？

- (A) $\frac{xdy - ydx}{x^2}$ (B) $\frac{ydx - xdy}{y^2}$
(C) $\frac{xdy - ydx}{xy}$ (D) $\frac{ydx - xdy}{xy}$

16 下列何者是級數 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{9^m} x^{2m}$ 的收斂半徑 (radius of convergence) R ?

- (A) $R = 9$ (B) $R = 3$ (C) $R = \frac{1}{9}$ (D) $R = \frac{1}{3}$

17 下列那一個微分方程式的通解 (general solution) 為 $y = e^{2x}(c_1 \sin(\sqrt{3}x) + c_2 \cos(\sqrt{3}x))$? 其中 c_1 和 c_2 為任意常數。

- (A) $y'' + y' + 7y = 0$ (B) $y'' + 4y' + 7y = 0$
(C) $y'' - 4y' + 7y = 0$ (D) $4y'' - 16y' + 13y = 0$

18 給定一個連續隨機變數 X , 其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-x/6}, & x > 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$, 則變異數 (variance) σ_x^2 為何？

- (A) 1/6 (B) 6 (C) 12 (D) 36

19 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數 (joint probability mass function) 為

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36}(x+y), & \text{if } x=1,2,3, y=1,2,3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求 } P(X+Y \leq 3) ?$$

- (A) 1/9 (B) 2/9 (C) 4/9 (D) 5/9

20 10 顆完全一樣的球分別標示為 $0,1,2,\dots,9$ 並放置於一容器中, 隨機從容器中取出一顆球並記下其標示之號碼, 該號碼為奇數或 3 的倍數或小於 5 之機率為何？

- (A) $\frac{6}{10}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{8}{10}$ (D) $\frac{9}{10}$