

等 別：三等考試
類 科：經建行政、農業行政、交通技術
科 目：統計學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、已知兩個獨立且相同分配的隨機變數分別為 X 和 Y ，而且 $X + Y$ 的動差母函數 (moment generating function) 為 $m_{X+Y}(t) = e^{4(e^t-1)}$ 。

請回答下列問題：

(一)求隨機變數 X 的動差母函數及機率分配函數。(12 分)(二)計算機率 $P(X \geq 2)$ 。(5 分)

(三)利用題(一)的動差母函數，求母體變異數 (variance)。(8 分)

二、設 X_1 和 X_2 是兩個獨立且有相同分配的隨機變數，其機率密度函數如下所示：

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$$

請回答下列問題：(每小題 6 分，共 24 分)

(一)證明 $X_1 + X_2$ 是 θ 的充分統計量 (sufficient statistic)。(二)求 $Y_1 = X_1 + X_2$ 和 $Y_2 = X_2$ 的聯合機率密度函數。(三) Y_1 和 Y_2 如題(二)所定義，計算已知 Y_1 下， Y_2 的期望值，即 $E(Y_2 | Y_1)$ 。(四) Y_1 和 Y_2 如題(二)所定義，求 $E(Y_2 | Y_1)$ 的變異數，即 $\text{Var}(E(Y_2 | Y_1))$ 。

三、研究洋蔥在不同溫度下軟化的程度，隨機抽取 6 袋洋蔥，每袋有 5 顆洋蔥。3 袋洋蔥存放於華氏 60 度的儲存室，另外 3 袋洋蔥存放於華氏 80 度的儲存室。應變數 (dependent variable) Y 為軟化的程度。利用統計軟體 (SAS) PROC MEANS 得到下列結果：

溫度	袋	總和	平均數	修正的平方和 (corrected sum squares)
60	1	50	10	52.58
60	2	55	11	42.82
60	3	75	15	19.30
80	4	70	14	22.78
80	5	90	18	51.12
80	6	80	16	57.40
		===	===	=====
		420	84	246.00

請回答下列問題：

(一)寫出計算適合此實驗設計的變異數分析表 (ANOVA Table)，包含來源 (source)、自由度 (degree of freedom) 及平方和 (sum of squares)。(18 分)

(二)以 F 檢定 (F test) 檢定溫度的效果，列出虛無假設與對立假設，檢定統計量、棄卻域 (rejection region) 和結論。(8 分)(參考的 f 值： $f_{5,24,0.05} = 2.621$, $f_{1,24,0.05} = 4.260$, $f_{1,4,0.05} = 7.709$, $f_{1,23,0.05} = 4.279$)

(請接背面)

等 別：三等考試
類 科：經建行政、農業行政、交通技術
科 目：統計學

四、某便利商店為了瞭解廣告的促銷效果，在臺北市隨機抽取 15 家分店比較廣告前的銷售量 x_i 與廣告後的銷售量 y_i ， $i=1,2,\dots,15$ 。資料整理如下所示：

	廣告前的銷售量	廣告後的銷售量
樣本平均數	$\bar{x} = 800$	$\bar{y} = 1200$
樣本變異數	$S_x^2 = 1400$	$S_y^2 = 2000$

另知廣告前後銷售量的樣本相關係數為 $r=0.85$ 。擬以簡單線性迴歸模型

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i=1,2,\dots,15, \text{ 分析資料，請回答下列問題：}$$

- (一)求斜率 (β_1) 的最小平方估計值。(10 分)
- (二)檢定廣告前後的平均銷售量是否相等？(假設廣告前後的銷售量的母體均滿足變異數均等的常態分配，顯著水準 $\alpha=0.10$ 。)(5 分)
- (三)已知廣告前的銷售量是 900，求其廣告後的平均銷售量是多少？(10 分)
- (參考的 t 值： $t_{30,0.05}=1.697$, $t_{29,0.05}=1.699$, $t_{15,0.05}=1.753$, $t_{14,0.05}=1.761$)