

等 別：三等考試

類 科：工業工程

科 目：作業研究

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、有兩個產品，其中產品 1 的單位利潤 (\$) $c_1 = 4$ ，產品 2 的單位利潤 (\$) $c_2 = 2$ 。生產它們要消耗三種資源（資源 1、資源 2、資源 3）。產品 1 只消耗資源 1 與資源 2，產品 2 只消耗資源 2 與資源 3。資源 1 的總量 $b_1 = 20$ ，資源 2 的總量 $b_2 = 17$ ，資源 3 的總量 $b_3 = 8$ 。每生產 1 個產品 1 需消耗 2 單位的資源 1 與 1 單位的資源 2，每生產 1 個產品 2 需消耗 2 單位的資源 2 與 1 單位的資源 3。在受限於資源的限制下，現在要決定兩個產品的生產量而使利潤最大。令產品 1 的生產量為 x_1 ，產品 2 的生產量為 x_2 。

(每小題 5 分，共 30 分)

(一)請寫出在考慮資源的限制下，最大化利潤的線性規劃問題以決定最佳生產量。

(二)請使用 simplex method 找到最佳解。

(三) c_1 、 c_2 個別的允許範圍 (allowable range) 為多少？(註：允許範圍是該參數的範圍但仍保持原來最佳解中的基變數(basic variable)的基底(basis))

(四)假設在最佳解的情況下，產品 2 的單位利潤變成 7，你是否會考慮增加產品 2 的產量？為什麼？

(五)每一個資源的 shadow prices 為多少？

(六)假設在最佳解的情況下，市場有人要賣 1 單位資源 1 並開價\$2，你是否會購買這 1 單位資源 1？為什麼？

二、廠區用電動車製造商預測明年第一季 1 月、2 月與 3 月的需求分別為 10、10 以及 20 輛車。生產成本因月而不同：1 月每一輛 80 萬，2 月每一輛 75 萬，3 月每一輛 85 萬。但每月的產能有上限：1 月最多可生產 15 輛，2 月最多可生產 12 輛，3 月最多可生產 25 輛。每輛完成車在 1 月結束時沒交貨要多付 2 萬的庫存成本（如維護費，資金的利息等），該庫存會流至 2 月；每輛完成車在 2 月結束時沒交貨要多付 1.5 萬的庫存成本，該庫存會流至 3 月。該製造商要決定明年第一季 1 月、2 月與 3 月每月的生產量以最小化成本。

(一)請將此問題寫成最低成本流量問題 (minimal cost flow problem) (註：有 4 個節點(node)，節點 $i = 0, 1, 2, 3$ 。節點 i 表示 i 月， $i = 1, 2, 3$ ，節點 0 為一個虛設節點其供給量(supply)為 40。其中 x_{0i} 為節點 0 到節點 i 的流量，在此表示第 i 月的生產量， $x_{i, i+1}$ 為 i 月庫存(會流至 $i+1$ 月)， $i = 1, 2$ 。) (10 分)

(二)給定最初解為 1 月生產 10 輛，2 月生產 10 輛，3 月生產 20 輛，請利用網路單體法 (network simplex method) 求解最佳解。(20 分)

(請接背面)

等 別：三等考試
類 科：工業工程
科 目：作業研究

三、考慮線性規劃問題：

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 2x_3$$

st.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(一)請寫出它的對偶問題 (dual problem)。(5 分)

(二)已知該問題的最佳解中基變數 (basic variable) 為 x_1 、 x_3 。請利用對偶理論寫出對偶問題的最佳解。(5 分)

四、工廠有五台機器同時運作，運作到需要保養停機的時間服從指數分布 (exponential distribution) 而平均為 1 個月。有位師傅負責保養機器，保養一台的時間服從指數分布 (exponential distribution) 而平均為 1/5 個月。保養後的機器立刻恢復正常運作。師傅負責保養機器以先到先服務的方式保養。機器間的運作時間是相互獨立，師傅保養機器的時間也相互獨立且與機器運作時間獨立。請利用連續時間馬可夫鏈 (continuous time Markov chain) 分析這些機器運作的情形。定義狀態 (state) 為等候保養以及正在保養的機器數。

(一)畫出轉移率 (transition rate) 圖以及寫出轉移率矩陣。(10 分)

(二)求出極限 (穩態) 機率。(5 分)

(三)機器的使用率 (utilization) 為何？(5 分)

(四)機器從開始要保養到保養完平均要多久？(5 分)

(五)假設每台機器運作時每月可產生 30 萬的收益，該工廠每月的平均收益是多少？
假設每台機器花了 500 萬元購入且五台同時購入，平均需要經過多少個月該工廠才會平衡買那五台機器的開銷？(5 分)