

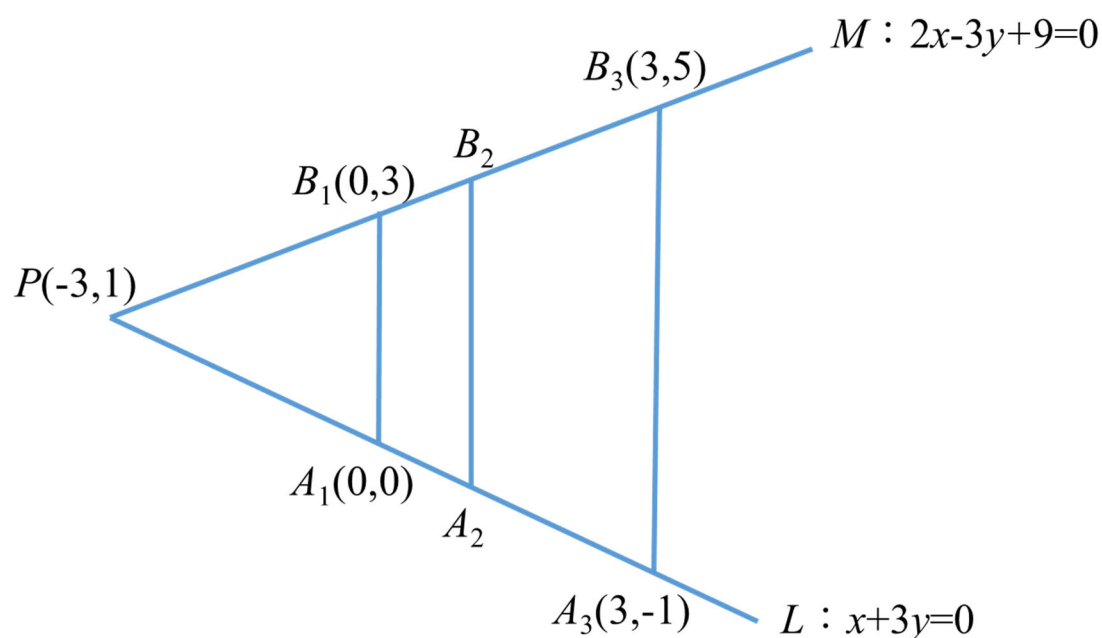
112 學年度學科能力測驗數學 B 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

112 年學科能力測驗數學 B 考科的非選擇題共有 2 題，其中第 19 題每題為 6 分；第 20 題每題為 6 分，總計 12 分。

本文謹提供非選擇題各題滿分參考答案與評分原則供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 17 日出刊的第 336 期《選才電子報》。以下提供 112 年學科能力測驗數學 B 考科中，非選擇題各題的滿分參考答案及評分原則：

第 19 題

一、滿分參考答案：



解聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ ，得 $P(-3, 1)$ 。

【法一】

因為 $\overrightarrow{PA_3} = 2\overrightarrow{PA_1}$ ，所以 A_1 為 P 與 A_3 的中點。由 $P(-3, 1)$ 得 A_3 的坐標為 $(3, -1)$ 。

因為 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1} = 6$ ，故 B_3 的坐標為 $(3, 5)$ 。

【法二】

因為 $\triangle PA_1B_1 \sim \triangle PA_3B_3$ 、 $\overline{PA_3} = 2\overline{PA_1}$ ，所以 $\overline{PB_3} = 2\overline{PB_1}$ 。

因為 $P(-3,1)$ 得 B_3 的坐標為 $(3,5)$ 。

【法三】

因 $\overline{A_1B_1} = 3$ ，得 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1} = 6$ 。

設 $B_3(x,y)$ ，所以 $A_3(x,y-6)$ ，將 A_3 代入 L 方程式，得 $x+3(y-6)=0$ ，

解聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y+9=0 \\ x+3(y-6)=0 \end{cases}$ ，得 B_3 的坐標為 $(3,5)$ 。

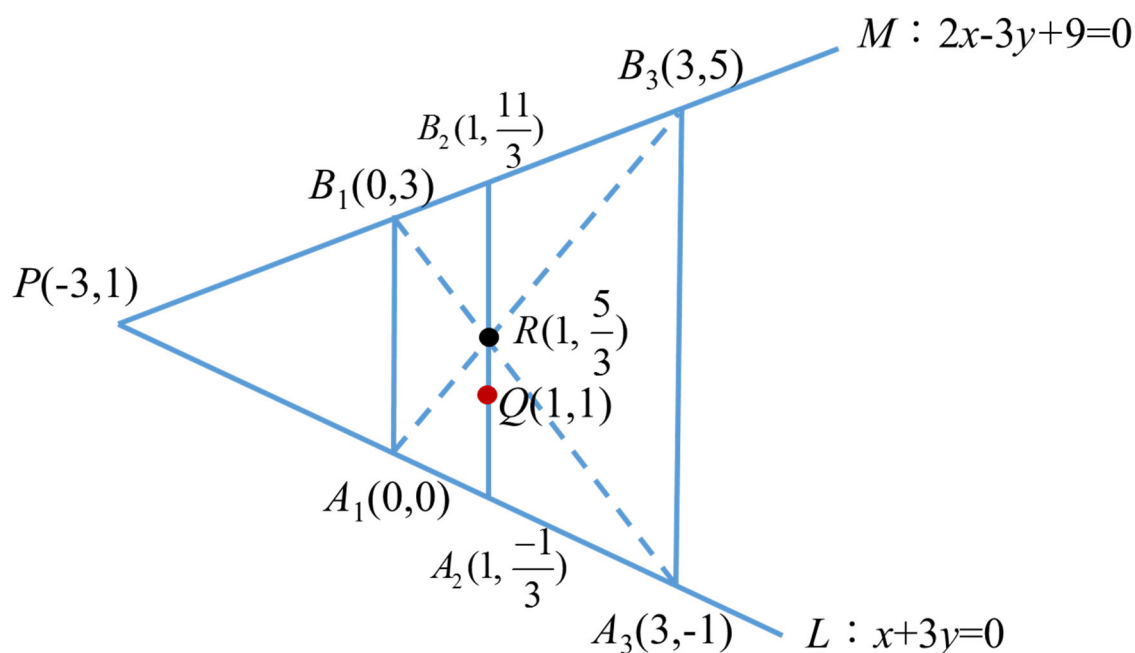
二、評分原則：

1. 根據題意，能求解聯立方程式得 P 。

2. 利用平行線截比例線段得 $\overline{PB_3} = 2\overline{PB_1}$ ，進而求出 B_3 ；或由 A_1 為 P 與 A_3 的中點，先求出 A_3 ，再利用 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1} = 6$ 求得 B_3 。

第 20 題

一、滿分參考答案：



策略一：先求 $\overline{A_2B_2}$ 上的點

【法一】

設 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的交點為 R ，由題意知 $\overline{A_1B_1}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，

故 $\Delta RA_1B_1 \sim \Delta RB_3A_3$ 。

因為 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1}$ ，所以 $\overline{A_1R} : \overline{RB_3} = 1:2$ 。

由題意知 R 位於 $\overline{A_2B_2}$ ，且 $\overline{A_2B_2}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，得 $\Delta A_1A_2R \sim \Delta A_1A_3B_3$ ，

故 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = 1:2$ 。由分點公式得 $A_2(1, \frac{-1}{3})$ 。

同理可得 $\overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = 1:2$ ，由分點公式得 $B_2(1, \frac{11}{3})$ 。

因為 $\overline{A_2Q} : \overline{QB_2} = 1:2$ ，由分點公式，計算 $\frac{2}{3}(1, \frac{-1}{3}) + \frac{1}{3}(1, \frac{11}{3})$ ，得 $Q(1, 1)$ 。

【法二】

設 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的交點為 R ，由 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的直線方程式，

解聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ ，得 $R(1, \frac{5}{3})$ 。

因為 R 位於 $\overline{A_2B_2}$ ，且 $\overline{A_2B_2}$ 平行於 y 軸，以 $x=1$ 代入 $L: x+3y=0$ ，

得 $A_2(1, \frac{-1}{3})$ 。

因為 R 為 $\overline{A_2B_2}$ 中點，故 $\overline{A_2Q} : \overline{QR} = 2:1$ ，

由分點公式，計算 $\frac{2}{3}(1, \frac{5}{3}) + \frac{1}{3}(1, \frac{-1}{3})$ ，得 $Q(1, 1)$ 。

【法三】

設 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的交點為 R ，由 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的直線方程式，

解聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ ，得 $R(1, \frac{5}{3})$ 。

由題意知 $\overline{A_1B_1}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，故 $\Delta RA_1B_1 \sim \Delta RB_3A_3$ 。

因為 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1}$ ，所以 $\overline{A_1R}:\overline{RB_3} = 1:2$ 。

又 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_2B_2}$ 和 $\overline{A_3B_3}$ 均為平行線，且 $\overline{A_1B_1} = 3$ 和 $\overline{A_3B_3} = 6$

得 $\overline{A_2B_2} = 3 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = 4$ 。

因為 R 為 $\overline{A_2B_2}$ 的中點，且 $\overline{A_2Q}:\overline{QB_2} = 1:2$ ，得 $\overline{QR} = \frac{2}{3}$ 。故 $Q(1,1)$ 。

【法四】

由題意知 $\overline{A_1B_1}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，故 $\Delta RA_1B_1 \sim \Delta RB_3A_3$ 。

因為 $\overline{A_3B_3} = 2\overline{A_1B_1}$ ，所以 $\overline{A_1R}:\overline{RB_3} = 1:2$ 。

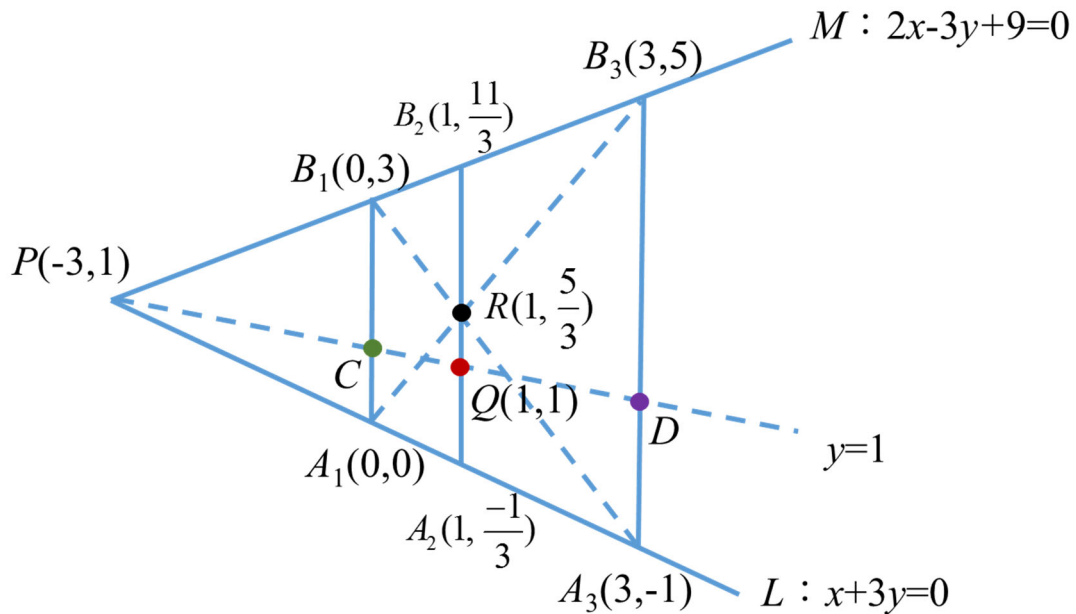
又 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_2B_2}$ 和 $\overline{A_3B_3}$ 均為平行線，且 $\overline{A_1B_1} = 3$ 和 $\overline{A_3B_3} = 6$

得 $\overline{A_2B_2} = 3 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = 4$ 。

設 $Q(x, y)$ ，因為 $\overline{A_2Q}:\overline{QB_2} = 1:2$ ，所以 $A_2(x, y - \frac{4}{3})$ 、 $B_2(x, y + \frac{8}{3})$ ，

分別代入 L 、 M 的方程式，解
$$\begin{cases} x + 3(y - \frac{4}{3}) = 0 \\ 2x - 3(y + \frac{8}{3}) + 9 = 0 \end{cases}$$
，因此 $Q(1,1)$ 。

策略二：先求 $\overline{PQ}$ 上的點



【法五】

設 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{A_1B_1}$ 的交點為 C ，因為 $\overline{A_2Q}:\overline{QB_2}=1:2$ ，所以 $\overline{A_1C}:\overline{CB_1}=1:2$ 。

由分點公式，計算 $\frac{2}{3}(0,0)+\frac{1}{3}(0,3)$ ，得 $C(0,1)$ 。

設 $\overline{A_1B_3}$ 和 $\overline{A_3B_1}$ 的交點為 R ，由題意知 $\overline{A_1B_1}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，

故 $\Delta RA_1B_1 \sim \Delta RB_3A_3$ 。

因為 $\overline{A_3B_3}=2\overline{A_1B_1}$ ，所以 $\overline{A_1R}:\overline{RB_3}=1:2$ 。

由題意知 R 位於 $\overline{A_2B_2}$ ，且 $\overline{A_2B_2}$ 平行於 $\overline{A_3B_3}$ ，得 $\Delta A_1A_2R \sim \Delta A_1A_3B_3$ ，

故 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2$ 。又 $\overline{PA_1}=\overline{A_1A_3}$ ，因此 $\overline{PA_2}:\overline{PA_1}=4:3$ 。

因為 $\Delta PA_1C \sim \Delta PA_2Q$ ，得 $\overline{PQ}:\overline{PC}=4:3$ 。

所以 $\overrightarrow{PQ}=\frac{4}{3}[(0,1)-(-3,1)]=(4,0)$ ，得 $Q(1,1)$ 。

【法六】

設 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_3B_3}$ 的交點分別為 C 、 D 。因為 $A_3(3,-1), B_3(3,5)$ ，

且 $\overline{A_1C}:\overline{CB_1}=\overline{A_3D}:\overline{DB_3}=1:2$ ，得 $C(0,1)$ 、 $D(3,1)$

因為 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2$ ，所以 $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:2$ ，得 $Q(1,1)$ 。

二、評分原則：

1.可採策略一「先求 $\overline{A_2B_2}$ 上的點」利用平行線截比例線段推得出 A_2 、 B_2 、 R 、 $\overline{A_2B_2}=4$ 等四個訊息中的兩個，進而求出 Q 。

2.可採策略二「先求 $\overrightarrow{PQ}$ 上的點」利用平行線截比例線段推得出 C ，再利用線段比例 $\overline{PQ}:\overline{PC}=4:3$ ，進而求出 Q ；亦或先求出 C 、 D 兩點，再用線段比例 $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:2$ ，進而求出 Q 。