

財團法人大學入學考試中心基金會

112學年度學科能力測驗試題

數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{18-1}{18-2}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\frac{\square}{\square}$ 劃記，如：

18-1	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
18-2	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

例：若答案格式是 $\frac{19-1}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\frac{\square}{\square}$ 劃記，如：

19-1	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
19-2	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

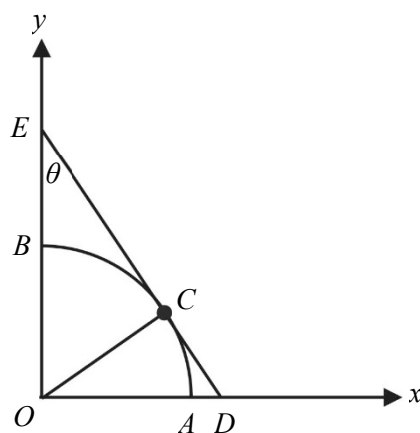
說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 若在計算器中鍵入某正整數 N ，接著連按「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵（取正平方根）3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？

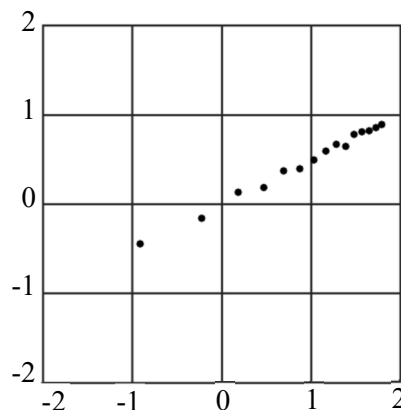
(1) 2^3 (2) 2^4 (3) 2^6 (4) 2^8 (5) 2^{12}

2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A 、 B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D 、 E ，如圖所示。令 $\angle OEC = \theta$ ，試選出為 $\tan \theta$ 的選項。

(1) $\overline{OE}$
(2) $\overline{OC}$
(3) $\overline{OD}$
(4) $\overline{CE}$
(5) $\overline{CD}$



3. 某生推導出兩物理量 s, t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據 (s_k, t_k) ， $k=1, \dots, 15$ 。老師建議他將其中的 t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點 $(s_k, \log t_k)$ ， $k=1, \dots, 15$ ，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s, t 的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s = 2t$ (2) $s = 3t$ (3) $t = 10^s$ (4) $t^2 = 10^s$ (5) $t^3 = 10^s$

4. 將數字 1、2、3、...、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\frac{8!}{4!4!}$ (2) $\frac{8!}{5!3!}$ (3) $\frac{9!}{5!4!}$ (4) $\frac{8!}{5!}$ (5) $\frac{9!}{5!}$

5. 已知坐標空間中 P 、 Q 、 R 為平面 $2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 上不共線三點。

令 $\overrightarrow{PQ}=(a_1, b_1, c_1)$ ， $\overrightarrow{PR}=(a_2, b_2, c_2)$ 。試選出下列行列式中絕對值為最大的選項。

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

6. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O 。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P 、 Q ，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？

$$(1) \frac{4}{7}$$

$$(2) \frac{5}{7}$$

$$(3) \frac{6}{7}$$

$$(4) 1$$

$$(5) \frac{8}{7}$$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1) 甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(2) 工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(3) 工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(4) 工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(5) 工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n ，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

- (1) $p_{n+1} > p_n$
- (2) $p_3 = 0.3$
- (3) $\langle p_n \rangle$ 為等差數列
- (4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$
- (5) 玩此遊戲 n 次且 $n \geq 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

9. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式

$$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \log_3 a_n > 18$$

的項數 n 之可能選項。

- (1) 23
- (2) 24
- (3) 25
- (4) 26
- (5) 27

10. 考慮坐標平面上的直線 $L: 5y + (2k - 4)x - 10k = 0$ （其中 k 為一實數），以及長方形 $OABC$ ，其頂點坐標為 $O(0,0)$ 、 $A(10,0)$ 、 $B(10,6)$ 、 $C(0,6)$ 。設 L 分別交直線 OC 、直線 AB 於點 D 、 E 。試選出正確的選項。

- (1) 當 $k=4$ 時，直線 L 通過點 A
- (2) 若直線 L 通過點 C ，則 L 的斜率為 $-\frac{5}{2}$
- (3) 若點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，則 $0 \leq k \leq 3$
- (4) 若 $k = \frac{1}{2}$ ，則線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)
- (5) 若線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)，則 L 的斜率可能為 $\frac{3}{10}$

11. 坐標平面上，設 A 、 B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣。設 C 、 D 分別表示以直線 $x=y$ 、 $x=-y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

- (1) A 、 C 將點 $(1,0)$ 映射到同一點
- (2) $A = -B$
- (3) $C = D^{-1}$
- (4) $AB = CD$
- (5) $AC = BD$

12. 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
- (2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$
- (3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$
- (4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4\sin^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元）如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。

已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為 13-1 13-2 元。

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

14. 設 a, b 為實數（其中 $a > 0$ ），若多項式 $ax^2 + (2a+b)x - 12$ 除以 $x^2 + (2-a)x - 2a$ 所得

餘式為 6，則數對 $(a, b) = (\text{14-1} , \text{14-2} \text{14-3})$ 。

15. 設 O, A, B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$ 。若 C, D 兩點在

直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$ ，則 $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\text{15-1}}{\text{15-2}}$ 。

（化為最簡分數）

16. 令 $E: x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(-2, 1, 4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A, B, C 三點等距離。則點 P 與平面 E

的距離為 $\text{16-1} \sqrt{\text{16-2}}$ 。（化為最簡根式）

17. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ ， t 為實數、 $L_2: \begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$ ， s 為實數，另

一直線 L_3 與 L_1, L_2 皆相交且垂直。若 P, Q 兩點分別在 L_1, L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，

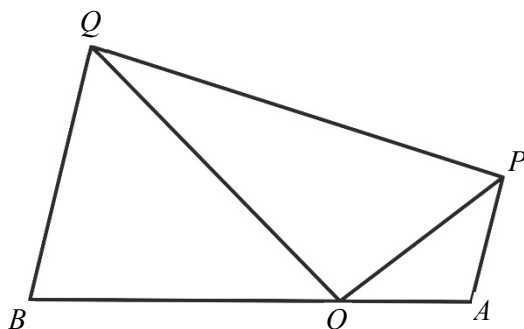
則 P, Q 兩點的距離為 $\text{17-1} \sqrt{\text{17-2}}$ 。（化為最簡根式）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$ 、 $B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P 、 Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP} = \overline{OA}$ 、 $\overline{BQ} = \overline{OB}$ 、 $\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP = \theta$ 。根據上述，試回答下列問題。



18. 線段 $\overline{OP}$ 長為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ (3) $2\sin \theta$ (4) $2\cos \theta$ (5) $\cos 2\theta$

19. 若 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。（非選擇題，6 分）

20.（承 19 題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。
（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$