

等 別：三等一般警察人員考試

類 科 別：消防警察人員

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、求解 $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$ ， $y(0) = -3$ ， $y'(0) = 1$ 。(20 分)

二、函數 $f(x)$ 的拉氏轉換 (Laplace Transform) 定義為 $F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ ，其中 $L\{f(x)\}$ 代表 $f(x)$ 的拉氏轉換。

(一) 已知 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $[0, \infty)$ 連續，拉氏轉換存在。請證明 $f'(x)$ 的拉氏轉換為 $L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$ 。(10 分)

(二) 請推導出 $L\{\cos 5x\}$ 。(10 分)

三、以級數方法 (series method) 求解以下的微分方程式初始值問題 (initial value problem)

$y'' + 2xy' + 2y = 0$ ， $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 1$ 。假設解為 $y = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ ，求出 6 個係數： a_0 ， a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 ， a_5 。(20 分)

四、考慮函數 $G(x, y, z) = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$ ，其中 $\ln(\cdot)$ 是自然對數函數 (natural logarithm function)。

求 $G(x, y, z)$ 在點 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ 於 $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 方向之方向導數 (directional derivative)。(20 分)

五、已知函數 $f(x) = x + \pi$ ， $-\pi < x < \pi$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 為 $f(x) =$

$\pi + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{n}\right)(-1)^{n+1} \sin nx$ 。利用傅立葉級數收斂的特性可以得到 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1} =$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{A}{B}\pi$ 。試求出 A 和 B 之值。(20 分)