

101年公務人員特種考試警察人員考試、
101年公務人員特種考試一般警察人員考試及
101年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

等 別：高員三級鐵路人員考試

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉氏 (Laplace) 轉換法求解以下微分方程式：

$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ ；其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數， $\delta(t)$ 為脈衝 (impulse) 函數。(10 分)

二、有一曲面 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ，求在點 $(0, 0, 4)$ 之切面方程式及法線參數表示式。(10 分)

三、矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta \times \sin \theta & -\cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta & -\cos \theta \times \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，求：

(一) A 是否為一正交矩陣 (orthogonal matrix)？請簡要說明之。(5 分)

(二) A 的反矩陣為何？(5 分)

(三) $|\det(A)| = ?$ (5 分) (亦即矩陣 A 的行列式值的絕對值)

四、若隨機變數 (random variable) X 的機率密度函數 (probability density function)

為 $f_X(x) = \begin{cases} k(1-x^4) & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{elsewhere} \end{cases}$ ，求：

(一) k 值。(5 分)

(二) X 的期望值 (mean value)： $E[X]$ 。(5 分)

(三) X^2 的期望值 (mean value)： $E[X^2]$ 。(5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：7711

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\}$ ，則 $L\{e^{2t} \sin 4t\}$ 為何？

(A) $\frac{4}{(s+2)^2+4}$

(B) $\frac{s}{(s+2)^2+4}$

(C) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$

(D) $\frac{4s}{(s-2)^2+16}$

2 下列何者可為 $y''-2y'+2y=0$ 之解？

(A) $y = e^x$

(B) $y = e^x + \cos x$

(C) $y = \cos x$

(D) $y = e^x \cos x$

3 若 $ax^m + bx^n$ 為 $x^2y''+5xy'+3y=0$ 之通解，則 $m+n$ 之值為何？

(A) -5

(B) -4

(C) 3

(D) 5

4 求微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \sin y}{y - 2e^x \cos y}$ 的通解為何？

(A) $e^x \sin^2 y + y \cos y - \sin y = c$

(B) $e^x \sin^2 y + y \sin y - \cos y = c$

(C) $e^x \sin^2 y + (y-1) \cos y = c$

(D) $e^x \sin^2 y + \cos y + \sin y = c$

5 設微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy + e^x y = 9$ ，其中 $y(0)=2$ ， $y'(0)=1$ 。若函數 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 為此微分方程式之級數解，試求 $a_0 + a_1 + a_2$ 值？

(A) $\frac{7}{2}$

(B) $\frac{11}{2}$

(C) $\frac{13}{2}$

(D) $\frac{15}{2}$

6 求 R^3 中之向量 $x = (1, 2, -1)$ 相對於基底 $B' = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\}$ 之座標：

(A) $[x]_{B'} = (5, -8, -2)$

(B) $[x]_{B'} = (1, 2, -1)$

(C) $[x]_{B'} = (5, 8, -2)$

(D) $[x]_{B'} = (1, -2, -1)$

7 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 24 & -21 & 2 & -13 \end{bmatrix}$ 則 $\text{Rank}(A) = ?$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

8 有一個矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ ，請問下面何者正確？

(A) 此矩陣的秩 (rank) 為 3

(B) $[1 \ 0 \ 0.8]$, $[0 \ 1 \ 0.2]$, $[0 \ 0 \ 1]$ 為矩陣 A 的列空間 (row space) 基底

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{7} \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 為矩陣 A 的行空間 (column space) 基底

(D) A 的行列式值 = 0

9 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 A 的行列式值 (determinant) 為何？

(A) 123

(B) 234

(C) 456

(D) 567

10 下列何者不為正交矩陣 (orthogonal matrix) ？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 求機率 } P(1 \leq X < 3, 2 \leq Y < 4) = ?$$

(A) $\frac{1}{15}$

(B) $\frac{2}{15}$

(C) $\frac{3}{15}$

(D) $\frac{4}{15}$

12 一系統由 4 項獨立運作之組件構成，其組件正常運作之機率分別為 0.9，0.7，0.5 及 0.3，令隨機變數 X 為該系統中正常運作組件之數量，則機率 $P(X > 0) = ?$

(A) 0.9055

(B) 0.9450

(C) 0.9895

(D) 0.9976

13 設一隨機變數 (random variable) X ，其期望值 (mean value) $E[X] = 2$ ，均方差 (variance) $\sigma_X^2 = 1$ 。令 $Y = 2X$ ，則 $E[Y^2]$ 之值為何？

(A) 2

(B) 4

(C) 8

(D) 20

- 14 在複數 z 平面上，包含無窮遠處之左半平面，經 $w = e^z$ 的映射後，在複數 w 平面上之值域為：
- (A) 一半平面 (B) 一直線 (C) 一圓碟型區域 (D) 一長條型區域
- 15 下列選項何者正確，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
- (A) $\sin(3 - 4i) = \sin(3)\cos(4) - i\sin(4)\cos(3)$ (B) $\sin(3 - 4i) = i\sin(3)\cos(4) - \sin(4)\cos(3)$
- (C) $\sin(3 - 4i) = \sin(3)\cosh(4) - i\sinh(4)\cos(3)$ (D) $\sin(3 - 4i) = i\sin(3)\cosh(4) - \sinh(4)\cos(3)$
- 16 求複數函數積分 $\oint_C \frac{\cos(z^5)}{z^2 - 1} dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上以原點為圓心、半徑為 2 的封閉曲線，方向為逆時鐘方向。其中 $i = \sqrt{-1}$
- (A) $i \cdot 2\pi \cos(1)$ (B) π (C) 1 (D) 0
- 17 若 $f = \sqrt[3]{x^2 y^{12} z^{1/2}} (yz + xz - xyz)$ ，則下列何者正確？
- (A) $\nabla f = x^{5/3} yz^{1/2} \mathbf{i} + x^{7/3} z^{1/2} \mathbf{j} + x^{7/3} yz^{-1/2} \mathbf{k}$ (B) $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- (C) $\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla f)) = 0$ (D) $\nabla(\nabla \cdot (\nabla f)) = 0$
- 18 曲線 C 的參數表示式為 $x = \cos(t) + t \sin(t)$ ； $y = \sin(t) - t \cos(t)$ ； $z = t^2$ ，則其曲度 (curvature) 為何？
- (A) $\sqrt{5}t$ (B) $\frac{1}{5t}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}t^2$ (D) 0
- 19 讓 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ，則 $\mathbf{u}$ 於 $\mathbf{v}$ 之投影長度為何？
- (A) 7 (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- 20 曲線 C 的參數表示式為 $x = t^2$ ； $y = \frac{1}{2}t^2$ ； $z = t^2 + 3$ ，則從點 $P_1 = (0, 0, 3)$ 到點 $P_2 = (1, \frac{1}{2}, 4)$ 的弧線長 (arc length) 為何？
- (A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$