

115年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮以下微分方程

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(一)請寫出上述方程的通解 (General solutions)。(15 分)

(二)令

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

求出 $v(t)$ 的極限當 t 趨近 ∞ 。(10 分)

二、(一)求不定積分 $\int \sqrt{1 + y^2} dy$ 。(15 分)

(二)設曲線 $L = \{(x, \sin x) : x \in [0, \pi/2]\}$ ，請求出 L 繞 x 軸一圈所產生的曲面的面積。(10 分)

三、設向量場 $\vec{F} = (x, y)$ 及由橢圓 $C = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ 所圍成的封閉區域 D 。請驗證散度定理 (Divergence theorem)：(25 分)

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} dA = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

這裡 $\vec{n}$ 表示 C 上的單位外法向量， s 表示弧長參數。

四、考慮以下雙曲線偏微分方程的問題：(25 分)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2, & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & (0 < x < \infty) \\ u(0, t) = 0, & (t > 0) \end{cases}$$

而且假設對任一時間 $t > 0$ ，解 $u(x, t)$ 在 $0 < x < \infty$ 是有界函數。利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求此問題的解 $u(x, t)$ 。