

大學入學考試中心

108 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{8}$ 畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 點 $A(1,0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ 上。試問： Γ 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 $L: y = 2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

2. 下列哪一個選項是方程式 $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ 的解？（註： $i = \sqrt{-1}$ ）

(1) $-2i$ (2) $-i$ (3) i (4) 2 (5) 4

3. 試問共有多少組正整數 (k, m, n) 滿足 $2^k 4^m 8^n = 512$ ？

(1) 1 組 (2) 2 組 (3) 3 組 (4) 4 組 (5) 0 組

4. 廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材作三道菜，每道菜可以只用一種食材或用多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 18 (5) 27

5. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ 。試選出正確的選項。

- (1) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (2) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$
(3) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$ (4) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$
(5) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$

6. 某超商依據過去的銷售紀錄，冬天平均氣溫在 6°C 到 24°C 時，每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關係數為 -0.99 ，部分紀錄如下表。

平均氣溫 ($^{\circ}\text{C}$)	11	13	15	17	19	21
平均售出量 (杯)	512	437	361	279	203	135

某日平均氣溫為 8°C ，依據上述資訊推測，試問該日賣出的咖啡數量應接近下列哪一個選項？

- (1) 570 杯 (2) 625 杯 (3) 700 杯 (4) 755 杯 (5) 800 杯

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 之公差為正實數 α 。試選出正確的選項。

- (1) 若 $b_n = -a_n$ ，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$
(2) 若 $c_n = a_n^2$ ，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$
(3) 若 $d_n = a_n + a_{n+1}$ ，則 $d_1, d_2, d_3, \dots$ 是公差為 α 的等差數列
(4) 若 $e_n = a_n + n$ ，則 $e_1, e_2, e_3, \dots$ 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
(5) 若 f_n 為 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \dots$ 是公差為 α 的等差數列

8. 在數線上，甲從點 -8 開始做等速運動，同時乙也從點 10 開始做等速運動，乙移動的速率是甲的 a 倍，且 $a > 1$ 。試選出正確的選項。
- (1) 若甲朝負向移動而乙朝正向移動，則他們會相遇
 - (2) 若甲朝負向移動且乙朝負向移動，則他們不會相遇
 - (3) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，則乙先到達原點 0
 - (4) 若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會越來越大
 - (5) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點 -2 相遇，則 $a = 2$
9. 從 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 這七個數字中隨機任取兩數。試選出正確的選項。
- (1) 其和大於 10 的機率為 $\frac{1}{7}$
 - (2) 其和小於 5 的機率為 $\frac{1}{7}$
 - (3) 其和為奇數的機率為 $\frac{4}{7}$
 - (4) 其差為偶數的機率為 $\frac{5}{7}$
 - (5) 其積為奇數的機率為 $\frac{2}{7}$
10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ$ 。試選出正確的選項。
- (1) $\sin A < \sin B$
 - (2) $\sin B < \sin C$
 - (3) $\cos A < \cos B$
 - (4) $\sin C < \cos C$
 - (5) $\overline{AB} < \overline{BC}$

11. 某地區衛生機構成功訪問了 500 人，其中年齡為 50–59 歲及 60 歲（含）以上者分別有 220 名及 280 名。這 500 名受訪者中，120 名曾做過大腸癌篩檢，其中有 75 名是在一年之前做的，有 45 名是在一年之內做的。已知受訪者中，60 歲（含）以上者曾做過大腸癌篩檢比率是 50–59 歲者曾做過大腸癌篩檢比率的 3.5 倍。試選出正確的選項。

- (1) 受訪者中年齡為 60 歲（含）以上者超過 60%
- (2) 由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在 50–59 歲間的機率大於 0.25
- (3) 由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率為 $2 \cdot \left(\frac{45}{120}\right)\left(\frac{75}{119}\right)$
- (4) 這 500 名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於 75%
- (5) 受訪者中 60 歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過 90 名

12. 設 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 為實係數三次多項式， $g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$, $r_2(x)$ 。試選出正確的選項。

- (1) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$
- (2) $f_1(x) + f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x) + r_2(x)$
- (3) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$
- (4) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $\frac{-1}{3}r_1(x)$
- (5) $f_1(x)r_2(x) - f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

13. 坐標空間中有一平面 P 過 $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。

- (1) 向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 垂直
- (2) 平面 P 與 xy 平面垂直
- (3) 點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上
- (4) 平面 P 包含 x 軸
- (5) 點 $(1,1,1)$ 到平面 P 的距離是 1

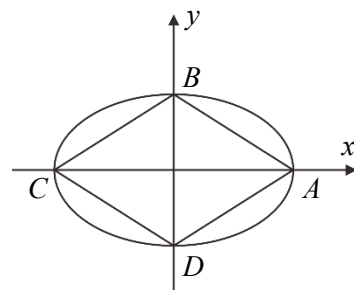
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-30）
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

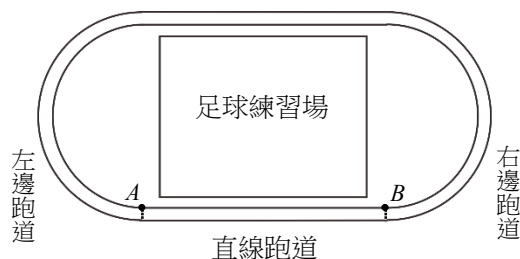
A. 設 x, y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ ，則 $x+3y = \underline{\textcircled{14} \textcircled{15}}$ 。

B. 如圖（此為示意圖）， A, B, C, D 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的頂點。若四邊形 $ABCD$ 的面積

為 58，則 $a = \frac{\textcircled{16} \textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。（化為最簡分數）



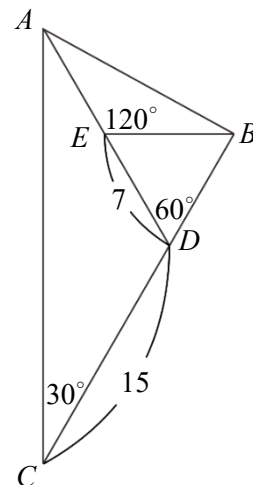
C. 某高中已有一個長 90 公尺、寬 60 公尺的足球練習場。若想要在足球練習場的外圍鋪設內圈總長度為 400 公尺的跑道，跑道規格為左右兩側各是直徑相同的半圓，而中間是上下各一條的直線跑道，直線跑道與足球練習場的長邊平行（如示意圖）。則圖中一條直線跑道 $\overline{AB}$ 長度的最大可能整數值為 $\textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21}$ 公尺。



D. 某次選舉中進行甲、乙、丙三項公投案，每項公投案一張選票，投票人可選擇領或不領。投票結束後清點某投票所的選票，發現甲案有 765 人領票、乙案有 537 人領票、丙案有 648 人領票，同時領甲、乙、丙三案公投票的有 224 人，並且每個人都至少領了兩張公投票。根據以上資訊，可知同時領甲、乙兩案但沒有領丙案公投票者共有 $\textcircled{22} \textcircled{23} \textcircled{24}$ 人。

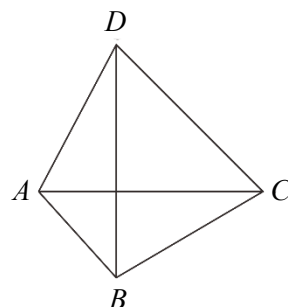
- E. 如圖(此為示意圖), 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點, $\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E 點, 且 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle EDB = 60^\circ$, $\angle AEB = 120^\circ$ 。若 $\overline{CD} = 15$, $\overline{ED} = 7$,

則 $\overline{AB} = \underline{\textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。



- F. 坐標空間中, 考慮有一個頂點在平面 $z=0$ 上、且有另一個頂點在平面 $z=6$ 上的正立方體。則滿足前述條件的正立方體之邊長最小可能值為 $\underline{\textcircled{27} \sqrt{\textcircled{28}}}$ 。
(化成最簡根式)

- G. 如圖(此為示意圖), A, B, C, D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直, 則 $\tan \angle BAD = \underline{\textcircled{29} \textcircled{30}}$ 。



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積 $= \frac{1}{3} \text{底面積} \times \text{高}$