

115年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、
國家安全局國家安全情報人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員考試

等別：三等考試

類科組別：電子組（選試英文）

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、找出正交矩陣 P ，對角化矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，其對角矩陣為 D ，求矩陣 P 和 D 。（20 分）

二、3 階微分方程 $y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 2x - 1$ ，求 $y(x) = ?$ （12 分）

三、 γ 代表圓心在原點半徑為 5 的圓，求 $\oint_{\gamma} \frac{2z+1}{z^2+3iz} dz = ?$ （10 分）

四、 X 為連續隨機變數，其機率密度 $f_x(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求 X 的期望值 和變異數。（8 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：3505

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 給定兩向量 $u = [1 \ 0 \ -1]^T$ 及 $v = [0 \ -1 \ 1]^T$ ，下列選項何者錯誤？

(A)此兩向量的範數（norm）的和為 $2\sqrt{2}$

(B)此兩向量的內積（inner product）為 -1

(C)此兩向量的外積（cross product）為 $[-1 \ 1 \ -1]^T$

(D)此兩向量的夾角為 $\frac{2\pi}{3}$

- 2 矩陣 A 具有特徵多項式 (characteristic polynomial) $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2(\lambda - 3)$ ，下列選項何者正確？
 (A) 矩陣 A 的行列式值 (determinant) $\det(A) = p(0)$
 (B) 矩陣 A 的維度 (dimensions) 為 4
 (C) 矩陣 A 的行列式值 (determinant) $\det(A) = -48$
 (D) 矩陣 A 的秩 (rank) 為 5
- 3 給定兩向量 $u = [1 \ 0 \ 1]^T$ 及 $v = [0 \ 1 \ 1]^T$ ，分解 u 為 $u_1 + u_2$ ，其中 u_1 為 u 在 v 的垂直投影 (orthogonal projection)，則下列選項何者錯誤？
 (A) 向量 $u_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$
 (B) 向量 $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$
 (C) 向量 u_2 的範數 (norm) $\|u_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 (D) 兩向量 u_1, u_2 的內積 (inner product) 為零
- 4 令 $B = \{u_1, u_2\}$ 及 $B' = \{v_1, v_2\}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 兩組基底 (bases)，其中 $u_1 = [0 \ -1]^T$ ， $u_2 = [-1 \ 0]^T$ ， $v_1 = [-1 \ 0]^T$ ， $v_2 = [0 \ -1]^T$ ，若 $T_{B \rightarrow B'}$ 是 B 到 B' 的線性轉換矩陣且 $T_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則下列選項何者正確？
 (A) a, b 兩數乘積 $ab = 1$ (B) b, c 兩數乘積 $bc = 1$ (C) a, c 兩數乘積 $ac = 1$ (D) c, d 兩數乘積 $cd = 1$
- 5 令 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 為一個線性映射函數，其定義為 $T(x, y) = (x + y, x + 2y)$ ，則下列選項何者錯誤？
 (A) 函數 T 之零核空間 (null space) 的維度為 0 (B) 函數 T 的秩 (rank) 為 2
 (C) 函數 T 為一對一函數 (D) 函數 T 之行空間 (column space) 的維度為 0
- 6 A 、 B 和 C 均為 2×2 矩陣且 $AC = BC$ ，上標 T 代表矩陣轉置，則下列敘述何者錯誤？
 (A) $C^T A^T = C^T B^T$ (B) $A(BC) = (AB)C$
 (C) $A = B$ (D) $(A + B)C = AC + BC$
- 7 向量 $V_1 = [1, 2, 0]$ $V_2 = [-2, 2, 1]$ ，則下列何者正確？
 (A) V_1 和 V_2 互相平行 (B) V_1 和 V_2 可展開 3 維空間中的任一向量
 (C) V_1 和 V_2 線性獨立 (D) V_1 和 V_2 互相垂直
- 8 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列關於 A 的特徵值 (eigenvalue) 與特徵向量 (eigenvector) 的敘述何者錯誤？
 (A) 3 是特徵值 (B) 4 是特徵值 (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是特徵向量 (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是特徵向量
- 9 複變函數 (complex function) $f(z) = \sec(z)$ ，則此函數在 $z = -\frac{\pi}{2}$ 的殘餘數 (residue) 為何？
 (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2
- 10 複變函數 (complex function) $f(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+2}$ ，若 C 為逆時鐘繞圓周 $|z-i|=2$ 的路徑，且積分 $\oint_C f(z)dz = a + bi$ ，其中 a, b 為實常數，且 $i = \sqrt{-1}$ ，則下列選項何者正確？
 (A) $a = \pi$ (B) $a = 2\pi$ (C) $b = \pi$ (D) $b = 2\pi$

- 11 給定複變數函數 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ，針對區域 $|z| > 2$ 對函數 $f(z)$ 展開可得 $f(z) = az^{-2} + bz^{-3} + cz^{-4} + dz^{-5} + \dots$ ，其中 a, b, c, d 為實常數，則下列選項何者錯誤？
(A) $a = 1$ (B) $b = 3$ (C) $c = 7$ (D) $d = 13$
- 12 複變函數 $f(x+iy) = x^2 + ay^2 + i2xy$ ， a 為常數，如果 f 為可解析的函數 (analytic function)，下列何者正確？
(A) $a = -2$ (B) $a = -1$ (C) $a = 1$ (D) $a = 2$
- 13 下列何者為二階常微分方程式 $4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} - 5y = 0$ 的解 (c_1, c_2 為任一實數 (real values))？
(A) $y = c_1 x^{-\frac{5}{2}} + c_2 x^{\frac{1}{2}}$ (B) $y = c_1 x^{\frac{5}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}}$ (C) $y = c_1 x^{\frac{5}{2}} + c_2 x^{\frac{1}{2}}$ (D) $y = c_1 x^{-\frac{5}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}}$
- 14 考慮微分方程式 $(y+x^2)dx = xdy$ 使滿足 $x=1, y=2$ 的解為 $y = ax^2 + bx^c$ ，其中 a, b, c 為實常數，則下列何者正確？
(A) $a = -1$ (B) $b = -2$ (C) $c = 2$ (D) $c = 1$
- 15 函數 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 為 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ，令 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2(s-1)}$ ，則下列何者正確？
(A) $f(t) = e^t - t - 1$ (B) $f(t) = -e^t - t - 1$ (C) $f(t) = e^t + t - 1$ (D) $f(t) = -e^t + t - 1$
- 16 $y' + y = x, y(0) = 7$ ，下列何者為正確解答？
(A) $y = x - 2 + 9e^{-x}$ (B) $y = x - 1 + 8e^{-x}$ (C) $y = x^2 - 1 + 8e^{-x}$ (D) $y = x^2 - 2 + 9e^{-x}$
- 17 一階常微分方程式 $(\cos(x) - 2xy) + (e^y - x^2)y' = 0$ ， $y(0) = 1$ 下列何者為正確解答？
(A) $e^y - x^2 y + \sin(x) = e$ (B) $e^{-x} - x^2 y + \sin(x) = e$ (C) $e^y - x^2 y + \sin(y) = e$ (D) $e^{-x} - x^2 y + \sin(y) = e$
- 18 已知隨機變數 X 和 Y 的聯合機率密度函數 (Joint probability density function) 為 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx^2 y, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 k 為實數，則下列何者正確？
(A) $k=10$
(B) 在 $0 < y < 1$ ， $f_Y(y) = 5y^3$
(C) 隨機變數 X 之期望值 (expected value) 為 $\frac{5}{8}$
(D) 隨機變數 Y 之期望值 (expected value) 為 $\frac{3}{8}$
- 19 隨機變數 X 之機率質量函數 $P_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}, & x=1, 2, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，則 X 之期望值為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 20 條件機率質量函數 $P_{Y|X}(y|0) = \begin{cases} 0.8, & y=0 \\ 0.2, & y=1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $P_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} 0.5, & y=0 \\ 0.5, & y=1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 $P_X(x) = \begin{cases} 0.4, & x=0 \\ 0.6, & x=2 \end{cases}$ ，則 $P_{X|Y}(0|0) = ?$
(A) $\frac{4}{31}$ (B) $\frac{8}{31}$ (C) $\frac{16}{31}$ (D) $\frac{18}{31}$