

類 科：經建行政、農業行政、交通技術

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、一盒中放有編號 1, 2, 3, 4, 5 之大小、形狀、重量完全相同的 5 顆球。今由此盒隨機抽一球，若抽出為 n 號球，則投擲 n 個正、反兩面出現機率均等之均勻的銅板。
(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試求最後投擲之銅板中剛好有 3 個正面的機率。

(二)試求投擲之銅板出現正面次數的期望值。

二、投擲三個均勻銅板 4 次，令 X 表 4 次投擲中三個銅板都是反面的次數， Y 表 4 次投擲中三個銅板只有出現一個反面的次數。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試求 X 與 Y 皆小於 1 的機率。(二)試求 $X - Y = 1$ 的機率。

三、設隨機變數 X 與 Y 相互獨立，且各別具有自由度為 2 與 3 之卡方分配 $\chi^2(2)$ 與 $\chi^2(3)$ 。

令隨機變數 $T = \frac{X}{X + Y}$ 。(每小題 10 分，共 20 分)(一)試求 T 之機率密度函數 $f(t)$ 。(二)試求 T 之變異數 $\text{Var}(T)$ 。

四、假設 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為抽自具有常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 之隨機樣本。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)若 μ 和 σ^2 為未知的參數，且設 c 滿足 $P[X_1 \leq c] = 0.90$ ，試求 c 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。(二)若 μ 已知為 1， σ^2 為未知的參數，試求滿足 $P[X_1 \leq c] = 0.90$ 之 c 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴水準的信賴區間。(已知若隨機變數 Z 具有標準常態分配，則 $P[Z < 1.2816] = 0.90$)

五、考慮建立簡單直線迴歸模型 $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，且假設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ 為相互獨立且具常態分配 $N(0, \sigma^2)$ 之隨機誤差。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試求 β_1 與 β_2 之最大概似估計量， $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ 。(二)試求題(一)中， $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ 之相關係數。