

106年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及106年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等別：高員三級考試
類科別：電力工程、電子工程
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，證明 $A^2 - 4A + 5I = 0$ ，並由此計算 A^3 及 A^4 。（15分）

二、解微分方程式 $y' + 3x^2y = 6x^2$ ， $y(0) = 7$ （題中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ）。（10分）

三、以傅立葉級數（Fourier Series）表示 $f(t)$ ：（10分）

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi, & -\pi \leq t \leq 0 \\ -t + \pi, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases} ; \quad f(t) = f(t + 2\pi)。$$

四、一隨機變數 X 之機率密度函數為 $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ ， $x=0,1,2,\dots$ 且 $\lambda > 0$ ，試求：

- (一)期望值 $E(X)$ （5分）
(二)變異數 $\text{Var}(X)$ （10分）

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6705

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列各向量集合，何者不是 P_2 的一組基底？其中 P_2 為所有 2 階多項式形成的向量空間。

(A) $1+x+x^2, x+x^2, x^2$

(B) $3+x-4x^2, 2+5x+6x^2, 1+4x+8x^2$

(C) $1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x$

(D) $1+6x+4x^2, 2+4x-x^2, -1+2x+6x^2$

2 若 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ ，且 $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$ ，又 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ ，則 M 為何？

(A) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

3 設 $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 A 的簡化列梯形式 (reduced row echelon form)：

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4 若 $S = \text{span} \{(1,0,0), (0,1,1)\}$ ，亦即 S 為 $(1,0,0), (0,1,1)$ 兩向量所生成 (span) 的子空間，則下列何者為向量 $(2,3,1)$ 在 S 上的正交投影？

(A) $(1,1,1)$

(B) $(2,1,1)$

(C) $(1,2,2)$

(D) $(2,2,2)$

5 設 A, B 均為 $n \times n$ 矩陣，且 $A = B^{-1}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

(B) $\det(A) = \det(B)$

(C) $\det(A^{-1}) = \det(B)$

(D) $AB = BA$

6 假設線性轉換 $T: R^3 \rightarrow R^2$ ，已知 $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ， $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ， $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，如果 $T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ，請問 $m+n=?$

(A) 5

(B) 7

(C) 9

(D) 11

- 7 假設 $\text{Ln}z = \frac{1}{2} + \pi i$ ，求 z 之值為何？（ $\text{Ln}z$ 為 $\ln z$ 之主值（principal value））。
- (A) $e^{\frac{1}{2}}$ (B) $-e^{\frac{1}{2}}$ (C) $-e^{\frac{1}{4}}$ (D) $-e^{\frac{2}{3}}$
- 8 求複變函數積分 $\oint_C \tan(z)dz$ 之值，其中 z 為複數且積分路徑 C 為圓 $|z|=2$ ，以及 $i=\sqrt{-1}$ 。
- (A) $-2\pi i$ (B) $2\pi i$ (C) $-4\pi i$ (D) $4\pi i$
- 9 針對幾何級數（geometric series） $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 的敘述，其中 q 為複數，下列何者錯誤？
- (A) 若 $|q| < 1$ ，則此級數收斂
- (B) 若 $|q| > 1$ ，則此級數發散
- (C) 若 $|q| = 1$ ，則此級數可能收斂也可能發散
- (D) 若此級數收斂，則其級數和（sum of the series）為 $1/(1-q)$
- 10 求下列微分方程式的特解：
- $y''+4y=0$ 且 $y(0)=3$ ， $y'(0)=-8$
- (A) $y=3\cos(2x)-4\sin(2x)$ (B) $y=2\cos(2x)-3\sin(2x)$
- (C) $y=3\cos(3x)-4\sin(2x)$ (D) $y=3\sin(2x)-4\cos(2x)$
- 11 下列微分方程式何者的通解（general solution）為 $y=e^{2x}(1+c_1\sin(\sqrt{3}x)+c_2\cos(\sqrt{3}x))$ ？其中 c_1 及 c_2 為任意常數。
- (A) $y''+y'+7y=13e^{2x}$ (B) $y''+4y'+7y=19e^{2x}$ (C) $y''-4y'+7y=3e^{2x}$ (D) $4y''-16y'+13y=-3e^{2x}$
- 12 下列何者不可能是 $x^2y''+Axy'+By=0$ （ A 和 B 為常數）的解？
- (A) e^x (B) $x\ln(x)$ (C) e^2+x^2 (D) $x^{\sqrt{2}}\cos(5\ln(x))$
- 13 求 $f(t)=t\sin(at)$ 之拉氏轉換式：
- (A) $\frac{2as}{(s+a)^2}$ (B) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^4}$ (C) $\frac{2a^2s^2}{(s^2+a^2)^2}$ (D) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

14 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\} = \frac{3s^2 - s + 8}{s^3 + 4s^2 - s - 4}$ ，試求 $f(0)$ 之值？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

15 已知 $f(t)$ 的傅立葉轉換為 $\mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 1}$ ， $s = j\omega$ 。下列何者正確？

(A) $\mathfrak{F}\{f(-t)\} = \frac{-s}{-s^3 + 5s^2 + 1}$

(B) $\mathfrak{F}\{f(3t)\} = \frac{3s}{27s^3 + 45s^2 + 1}$

(C) $\mathfrak{F}\{f(t-2)\} = \frac{e^{-j(2\pi)s}}{s^3 + 5s^2 + 1}$

(D) $\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \frac{s^2}{s^3 + 5s^2 + 1}$

16 請用級數解法求出微分方程式 $y'' - y' - y = 0$ 之級數解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ，當 $y(0) = 0, y(1) = 1$ ， $c_0 + c_1 + c_2 = ?$

(A) 2.5

(B) 1.5

(C) 0.5

(D) 0.25

17 一週期函數 $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$ ，其傅立葉級數表示為 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ （其中 n 為常數），下列何者正確？

(A) $a_0 = 0$ (B) $a_0 = 1$ (C) $a_n = \pi$ (D) $a_n = 2\pi$

18 投擲一公平的錢幣連續 6 次，試求出現正面超過 3 次的機率為何？

(A) $\frac{7}{32}$ (B) $\frac{11}{32}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

19 設隨機變數 (random variable) X 和 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為：

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/40, & 0 < x < 5 \text{ and } 0 < y < 8 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

。則機率 $P[Y \leq 1.2X]$ 之值為何？

(A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

20 假設一隨機變數 X ，其期望值 (expectation value) $\mu_X = 5$ ，變異數 (variance) $\sigma_X^2 = 25$ ；試問一個隨機變數 $Y = (X+5)^2$ ，則此隨機變數 Y 的期望值 μ_Y 為何？

(A) 30

(B) 50

(C) 100

(D) 125