

111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮一個雙變數函數如下所示： $f(x,y)=(x^2+2y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$ 。令 P_0 代表 $x-y$ 平面上的點 $(1,-1)$ （即 $P_0=(1,-1)$ ）。

- (一)請計算 $f(x,y)$ 在 P_0 的梯度（gradient）為何？（5分）
- (二)請計算 $f(x,y)$ 在 P_0 的上面沿著 $(1,0)$ 的方向之方向導數（directional derivative）為何？（5分）

二、有一個微分方程式如下所示（僅考慮 $x>0$ ）：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} \cdot y = x, \text{ for } x > 0$$

此外，初始條件如下所示： $y(1)=3$ 。

- (一)此為一階線性微分方程（first-order linear differential equation），可以使用積分因子（integrating factor）求解。試求微分方程之積分因子。（5分）
- (二)請求解 $y(x)$ 。（5分）

三、有一個 3×3 的矩陣如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

已知此矩陣的特徵值（eigen-value）為2、2（重根）、1。

- (一)請寫出A矩陣的所有特徵向量（eigen-vector）的一般形式。（5分）
- (二)令 $B=A^8$ 。請寫出B矩陣的所有特徵向量的一般形式。（5分）

四、有一個半徑為 1 的圓形標靶，對著它亂射飛鏢，完全不瞄準，所以彈著點（亦即飛鏢在標靶上的落點）會是在某一個區域的機率大小，與標靶上的位置無關，只與該區域的面積大小成正比。若只考慮有射中標靶的飛鏢，直接忽略沒有射中標靶的飛鏢。令 X 代表彈著點到靶心（亦即標靶的正中心）的距離，是一個隨機變數（random variable），並定義另外一個隨機變數： $Y \triangleq X^2$ ，試問：

(一) 令 $f_X(x)$ 代表 X 的機率密度函數（probability density function），則 $f_X(x) = ?$ （5 分）

(二) 令 $f_Y(x)$ 代表 Y 的機率密度函數，則 $f_Y(x) = ?$ （5 分）

五、有一個複變函數 $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ ，欲對其作曲線積分（contour integration），請回答下列問題：

(一) 考慮如下所示的曲線： $C_1: |z|=3$ （即以複數平面原點為中心、半徑為 3 的圓），從 $z=3+0 \cdot i$ （ $i=\sqrt{-1}$ ）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問

$$\oint_{C_1} f(z) dz = ? \quad (5 \text{ 分})$$

(二) 考慮如下所示的曲線： $C_2: |z-i|=2$ （即以 $0+1 \cdot i$ 為中心、半徑為 2 的圓），從 $z=0+(-1) \cdot i$ （ $i=\sqrt{-1}$ ）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問

$$\oint_{C_2} f(z) dz = ? \quad (5 \text{ 分})$$

乙、測驗題部分：（50分）

代號：7346

(一) 本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二) 共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 我們準備對 $(1, -1, 3)$ 以及 $(2, 0, -4)$ 這兩個向量做外積（cross product）。如果將答案寫成 $(1, -1, 3) \times (2, 0, -4) = (a, b, c)$ ，那麼 $a \times b \times c = ?$

- (A) 30 (B) 80 (C) 100 (D) 150

2 考慮一線性方程組 $Ax = b$ ， A 為 $m \times n$ 矩陣， $m > n$ 。下列敘述何者錯誤？

- (A) 該方程組可能無解
(B) 該方程組可能只有一解
(C) 該方程組不可能有無窮多解
(D) 矩陣 A 的列階梯形矩陣（row echelon form）一定有「零」列（row of all zeros）

3 如果用 ϕ 來代表 $(1, 3, 2)$ 與 $(0, -1, 4)$ 這兩個向量之夾角，那麼 $\sin^2 \phi = ?$ 請選出最接近的數值：

- (A) 0.9 (B) 0.7 (C) 0.5 (D) 0.3

4 假設我們已知 $(1, 2, 3)$ 、 $(1, 0, -1)$ 以及 $(3, 1, \alpha)$ 這三個向量無法構成 $\mathbb{R}^3 \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ 的基底（basis）。那麼， $\alpha = ?$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

- 5 考慮如下所示之矩陣： $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 。下列敘述何者正確？
 (A) A 為可逆 (invertible) 的矩陣
 (B) A 為既約列梯形 (reduced row echelon form) 的矩陣
 (C) A 為單位矩陣 (identity matrix)
 (D) A 為對稱 (symmetric) 的矩陣
- 6 如下所示之選項中，何者為矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 的特徵向量 (characteristic vector, 亦稱 eigenvector)？
 (選項中的符號 $[\dots]^T$ 代表矩陣轉置 (transpose) 的動作。提示：建議你直接套用特徵向量的定義下去做檢測)
 (A) $[011]^T$ (B) $[101]^T$ (C) $[001]^T$ (D) $[-101]^T$
- 7 考慮一馬可夫過程 (Markov process)： $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} x(k)$ ，其狀態向量 x 之初值 $x(0) = [100 \ 0]^T$ 。請問 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ 為何？
 (A) $[80 \ 20]^T$ (B) $[30 \ 70]^T$ (C) $[60 \ 40]^T$ (D) $[50 \ 50]^T$
- 8 在下列四個選項所顯示的複變函數 (complex function)，其中有三個是可解析的 (analytic, 亦稱 differentiable (可微分的))，有一個是不可解析的 (not analytic)。請指出那一個是不可解析的？
 (A) e^z (B) z^3 (C) z (D) $\bar{z}$ (z 的共軛複數)
- 9 考慮如下所示之複變函數： $f(z) = \frac{6+i}{z^3} + \frac{-7}{z^2} + \frac{5-2i}{z} + 1 - 2z + (5-i) \cdot z^2 + z^3$ ($i = \sqrt{-1}$)。如果我們將該函數在 $z = 0$ (亦即複數平面上的原點) 的留數 (residue) 寫成 $a + b \cdot i$ 的形式，那麼 $a + b =$ ？
 (A) -2 (B) 0 (C) 3 (D) 2π
- 10 在本題中我們考慮複變函數的線積分 (line integral)。首先我們知道複數平面上的點可以寫成 $z = x + i \cdot y$ ($i = \sqrt{-1}$) 的形式，接著我們用 Γ 代表 $y = x^2$ 這條曲線，而且其起點為 $(x, y) = (0, 0)$ 、終點為 $(x, y) = (1, 1)$ 。請計算 $\int_{\Gamma} z^2 dz$ 並且將結果寫成 $a + b \cdot i$ 的形式，此時 $a \cdot b$ 的數值與下列選項何者最為接近？
 (A) -5 (B) -1 (C) 1 (D) 5
- 11 令 $g(z) = \int_C \frac{s^2 - s + 2}{(s - z)^2} ds$ ，其中路徑積分之路徑 C 為以 $\pm 2, \pm 2i$ 為頂點之正方形的邊界，行經方向為正。請問 $g(1)$ 之值為何？
 (A) $2\pi i$ (B) 1 (C) 0 (D) $4\pi i$
- 12 有一個雙變數函數 $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(x \cdot y)$ 。請問 $f(x, y)$ 在 $(1, \pi)$ 的梯度 (gradient) 為何？
 (A) $(1, \pi)$ (B) $(\pi, 1)$ (C) $(-\pi, -1)$ (D) $(1, -\pi)$
- 13 考慮微分方程式： $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \sin \omega t, t \geq 0$ ，其中 $\ddot{y}$ 與 $\dot{y}$ 分別代表 y 對變數 t 做一次與二次微分。請問下列敘述何者正確？
 (A) 對於某些 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值，方程式的解會收斂到零
 (B) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值，方程式的解是一個頻率為 ω 之週期函數
 (C) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值，方程式的解之震幅不會隨輸入函數之頻率 ω 產生變化
 (D) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值，方程式的解會隨時間之增大而收斂到一個週期函數

- 14 考慮一個初始值問題 (initial-value problem) — 微分方程: $y''(x) + x \cdot y'(x) + e^x \cdot y(x) = x^2 + 1$, 初始條件: $y(0) = 2$ 、 $y'(0) = -1$ 。如果我們將本問題的解答 $y(x)$ 寫成冪級數 (power series) 的形式: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, 那麼, $a_2 = ?$ (提示: 可以嘗試用泰勒級數 (Taylor series) 的形式去做思考, 直接將 a_2 與 $y''(0)$ 做連結)
- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$
- 15 下列關於拉普拉斯轉換 (Laplace transformation) $L(f) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ 之敘述, 何者錯誤?
- (A) $L(f+g) = L(f) + L(g)$
 (B) $L^{-1}(f+g) = L^{-1}(f) + L^{-1}(g)$, 其中 L^{-1} 為 L 之逆轉換
 (C) $L(fg) = L(f)L(g)$
 (D) $L(f') = s \cdot L(f)$, 其中 f' 為 f 之導函數, 且 $f(0) = 0$
- 16 考慮以下函數: $f(t) = 1$, 當 $0 \leq t \leq 2$; $f(t) = 0$, 當 $t \leq 0$ 或 $t \geq 2$ 。下列敘述何者正確?
- (A) 函數 $f(t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = 2e^{-j\omega} \sin(\omega) / \omega$
 (B) 函數 $g(t) := f(t+1)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $G(\omega) = \cos(\omega) / \omega$
 (C) 函數 $h(t) := \cos(\omega_0 t) f(t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $H(\omega) = 2 \sin(\omega - \omega_0) / (\omega - \omega_0)$
 (D) 函數 $m(t) := f(-t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $M(\omega) = -\sin(\omega) / \omega$
- 17 考慮一隨機變數 x , 其機率密度分布函數具有下列形式: $f(x) = 1 - |x|, |x| \leq 1$, 且 $f(x) = 0, |x| > 1$ 。請問 x 之變異數 (variance) 為何?
- (A) $1/\sqrt{6}$ (B) $2/3$ (C) $1/6$ (D) $\sqrt{2/3}$
- 18 有兩個連續的隨機變數 X 與 Y , 它們的合併機率密度函數 (joint probability density function) 為:
- $$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} A \cdot x \cdot y^2, & \text{if } 0 < x < 1 \text{ and } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
- 其中 A 為常數。請問隨機變數 X 的期望值 (expectation) 為下列何者?
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$
- 19 假設我們有一個不公平 (unfair) 的銅板, 在每次投擲中出現正面的機率為 0.4 , 出現反面的機率為 0.6 。如果我們丟擲這個銅板 5 次, 結果出現正面比出現反面還更多次的機率為何? (請在下列選項中選出最接近答案的數值。)
- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4
- 20 請問 i^{2i} 的主值 (principal value) 為何?
- (A) 0 (B) $-i$ (C) $e^{i\pi}$ (D) $e^{-\pi}$