

代號：70960
頁次：4-1

103年公務人員特種考試警察人員考試
103年公務人員特種考試一般警察人員考試
103年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

等 別：高員三級鐵路人員考試

類 科：電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、下列集合是否為 R^2 之子空間 (subspace)，請說明之。

(一) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$ (4 分)

(二) $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 0\}$ (3 分)

(三) $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$ (3 分)

二、令 $\mathbf{F} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{G} = g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j} + g_3\mathbf{k}$ 為兩向量場，

驗證 $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$ 。(15 分)

三、令複變函數 $f(z) = \frac{3}{1 - iz + 2z^2}$ ，試求：

(一) $f(z)$ 對 $2i$ 展開的泰勒級數 (Taylor series)。(10 分)

(二) 泰勒級數的收斂半徑。(5 分)

四、求解 $y(t) = 1 + \int_0^t y(t - \alpha) \sin(2\alpha) d\alpha$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6709

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 f 和 g 皆為可微分 (differentiable) 純量函數，則有關它們的梯度 (gradient) 與拉普拉斯算子

(Laplace operator) 的等式，下列何者錯誤？

(A) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(B) $\nabla(f/g) = (1/g^2)(f\nabla g - g\nabla f)$

(C) $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

(D) $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$

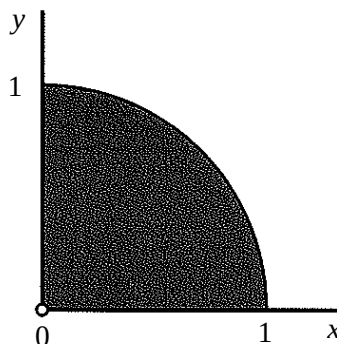
- 2 若 $f(x, y) = 1$ 為定義於下圖所示區域之質量密度，下列有關其質量 M 、重心 (center of gravity, $\bar{x}, \bar{y}$)、及慣性矩 (moment of inertia, I_x, I_y) 何者錯誤？

(A) $M = \frac{\pi}{4}$

(B) $\bar{x} = \frac{4}{3\pi}$

(C) $I_x = \frac{\pi}{8}$

(D) $I_y = \frac{\pi}{16}$



- 3 圓錐曲面 $\phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ， x, y 不全為 0，則下列有關梯度 (gradient) 敘述何者正確？

(A) 梯度向量 $= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(B) 梯度向量 $= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(C) 梯度向量 $= \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{k}$

(D) 梯度向量 $= -\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{k}$

- 4 若函數 $f(x, y, z) = 2xy + xe^z$ ，試求在點 $(1, 1, 1)$ 之梯度 (gradient)：

(A) $(2 + 2e)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

(B) $(2 + 2e)\mathbf{i} + (2 + e)\mathbf{j} + (1 + e)\mathbf{k}$

(C) $(2 + e)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

(D) $(2 + 2e)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (1 + e)\mathbf{k}$

- 5 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ， $c > 0$ ，則 $\det(cA)$ 與 $\det(A)$ 的關係為何？其中 $\det(A)$ 表示矩陣 A 之行列式值 (determinant)。

(A) $\det(cA) = c \bullet \det(A)$

(B) $\det(cA) = -c \bullet \det(A)$

(C) $\det(cA) = c^2 \bullet \det(A)$

(D) $\det(cA) = -c^2 \bullet \det(A)$

- 6 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求其輔因子矩陣 (matrix of cofactor)？

(A) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

- 7 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ ，試問 A 的秩 (rank) 為何？
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 8 一矩陣 M 為 $n \times n$ 可逆實數矩陣，下列何者敘述錯誤？
- (A) 若 M 為對稱矩陣，則其特徵值 (eigenvalue) 必為實數
- (B) 若 M 為對稱矩陣，則其必然是正交可對角化 (orthogonally diagonalizable)
- (C) 若 M 為正交可對角化的 (orthogonally diagonalizable) 且其特徵值 (eigenvalue) 為實數，則 M 必然為對稱矩陣
- (D) M 之特徵向量 (eigenvector) 與 M^{-1} 之特徵向量不同
- 9 若 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ ，求 $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ 之虛部值為？
- (A) $(6\sqrt{3} + 4)/7$ (B) $6\sqrt{3}/7$ (C) $4/7$ (D) $6\sqrt{3} + 4$
- 10 下列複數數列何者為收斂？（註： $i = \sqrt{-1}$ ）
- (A) $\{i^n\}$ (B) $\{(1+i)^n\}$ (C) $\{e^{n\pi i/4}\}$ (D) $\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$
- 11 請問 $z = \pi$ 是複變函數 $f(z) = \frac{z}{\sin^4(z)}$ 的幾階極點 (pole)？
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 12 設 $a(t)$ 為 $y'(t) + 2y(t) = 1$ 之解，則 $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 等於何值？
- (A) 0 (B) 0.5 (C) 1 (D) ∞
- 13 $f(x) = x + \pi$
 $= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
 $-\pi < x < \pi$ ，則 $a_1 + b_1 = ?$
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) π

- 14 函數 $f(t) = [e^{-3t} \sin 5t]u(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數。
- (A) $\frac{5}{s^2 + 6s + 25}$ (B) $\frac{5}{s^2 + 6s + 34}$ (C) $\frac{25}{s^2 + 6s + 25}$ (D) $\frac{25}{s^2 + 6s + 34}$
- 15 拉普拉斯轉換 $L[f(t)] = \frac{3s+2}{s^2 + 4s + 5}$ ，求 $f(0) = ?$
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 16 下列何者為 $y' = 3x^2 - \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$ 之解？其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ 。
- (A) $y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5x}$, $x > 0$ (B) $y = \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}$, $x > 0$
- (C) $y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}$, $x > 0$ (D) $y = \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{4x}$, $x > 0$
- 17 定義傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $f(x)$ 之傅立葉轉換為 $F(\omega)$ 。若 $f'(x)$ 的傅立葉轉換存在，試問 $f'(x)\cos(\omega_0 x)$ 的傅立葉轉換為何？
- (A) $\frac{i\omega}{2}(F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$ (B) $\frac{i\omega}{2}(F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0))$
- (C) $\frac{i}{2}((\omega - \omega_0)F(\omega - \omega_0) + (\omega + \omega_0)F(\omega + \omega_0))$ (D) $\frac{i}{2}((\omega - \omega_0)F(\omega - \omega_0) - (\omega + \omega_0)F(\omega + \omega_0))$
- 18 令 X 為二項式分布 (binomial distribution) 隨求變數，其機率為 $P(X = x) = C_x^n p^n (1-p)^{n-x}$ ，其中 $n = 100$ ， $p = 0.2$ ，求平均值 $E(50 - 2X)$ 為何？
- (A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 50
- 19 假設第一個袋子內有 4 個白球和 3 個黑球，第二個袋子內有 3 個白球和 5 個黑球。從第 1 個袋子中取出一個球 (隨意選取而且不被看到) 並直接放入第二個袋子中。請問若從第二個袋子中隨意取出 1 個黑球的機率為何？
- (A) 18/63 (B) 20/63 (C) 5/9 (D) 38/63
- 20 假定 X 為一隨機變數，其機率密度函數 (density function) 為 $f_x(x) = \begin{cases} Ae^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，求 A 為何？
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8