

110年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、求 $y'' + 8xy' + 16y = 1 + e^{-4x}$ 的通解 (general solution)。(15 分)

二、求 $\int_{\varphi} z^2 dz$ ，其中 $\varphi = t + i2t$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。(10 分)

三、一副標準 52 張的撲克牌，隨意抽出 3 張。求其為同花 (3 張為同一花色) 的機率。(5 分)

四、 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ ，

(一)求其行列式值 (determinant)。(5 分)

(二)求特徵值 (eigenvalues) 與其對應的特徵向量 (eigenvectors)。(10 分)

(三)求 P ，使 $P^{-1}AP$ 為 A 之對角化 (diagonalized) 矩陣。(5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2376

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 2×2 實數矩陣 Q 的特徵值為 -2 、 -3 。若定義矩陣跡 (trace) 為對角線元素相加，則 Q 的跡 (trace) 為何值？

- (A) -5 (B) -3 (C) -2 (D) 5

2 令 T 和 S 為 R^3 映射至 R^2 的線性轉換 (linear transformation)，其中 $T(x, y, z) = (x - y, z + y)$ ， $S(x, y, z) = (x + z, x + y)$ 。下列向量何者屬於 $T + S$ 的零空間 (nullspace)？

- (A) $(6, 2, -10)$ (B) $(3, 2, -5)$ (C) $(3, -2, 5)$ (D) $(-6, -2, -10)$

3 給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 10 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ 。則矩陣 ABC^{-1} 的行列式值為何？

- (A) -6 (B) -0.75 (C) 0.25 (D) 0.75

4 考慮如下所示之過度限制 (over-determined) 線性聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=-1 \\ x+3y=2 \\ x+4y=7 \end{cases}$$

如果這個聯立方程式的最小平方誤差解 (least-squared-error solution) 為 $x=\alpha, y=\beta$ ，那麼在下列敘述之中，何者為正確？

- (A) $\alpha > \beta$ (B) $\alpha^2 > \beta$ (C) $\alpha + \beta > \alpha \cdot \beta$ (D) $3\alpha + 2\beta > 0$

5 考慮一個作用在 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ 的線性轉換 (linear transformation) T 。已知 $T(1, -1) = (3, 2)$ 、 $T(1, 1) = (1, -5)$ 。若是 S 表示 T 的反轉換 (inverse transformation)，而且 $S(2, -7) = (p, q)$ ，那麼 $p+q$ 與下列那一個數值最接近 (也就是說差值的絕對值最小)？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

6 考慮如下所示之線性聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 1 \\ 0x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 + 0x_4 = -7 \\ 1x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

若是已知此聯立方程式無解，那麼在下列有關於 α 之敘述，何者正確？

- (A) $-\infty < \alpha \leq -5$ (B) $-5 < \alpha \leq 0$ (C) $0 < \alpha \leq 5$ (D) $5 < \alpha < \infty$

7 我們考慮一個矩陣： $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，若已知此矩陣為不可逆 (not invertible)，那麼請問 x 的數值為何？

- (A) -3 (B) 12 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

8 有一條三維空間中的曲線，曲線上的點的坐標 (x, y, z) 以參數式來表示為： $x(t)=2\sin(t)$ 、 $y(t)=2\cos(t)$ 、 $z(t)=5t$ 。請問此曲線在 $(0, 2, 0)$ 到 $\left(\sqrt{3}, 1, 5 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$ 這個區間內的長度與下列那一個數值最接近 (也就是說差值的絕對值最小)？

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

- 9 如果 $3e^{i\pi/3} + 5e^{-i\pi/4} + 2e^{i\pi} = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$)，那麼下列有關於 x 、 y 之敘述，何者正確？
- (A) $x \cdot y < 0$ (B) $x + y < 0$
(C) $|x| < |y|$ ($|x|, |y|$ 分別代表 x 與 y 之絕對值) (D) $x - y < x + y$
- 10 令 i 為單位虛數，則 $\sin(\pi + i)$ 的實部 (real part) 為何？
- (A) π (B) 1 (C) -1 (D) 0
- 11 若積分路徑 C 為逆時鐘方向且滿足 $|z| = 1$ ，則複變函數積分 $\oint_C 3 \frac{4z^2 + z + 2}{z(4z^2 - 17z + 4)} dz$ 之值為何？
- (A) πi (B) $-\pi i$ (C) $-2\pi i$ (D) $-13\pi i$
- 12 我們考慮複變函數 $f(z) = z^2 + 1$ ($z = x + iy$) 沿著曲線 Γ 作線積分 (line integral)，其中 Γ 代表在複數平面上由 $y = x^2$ 來描述的曲線；我們的積分範圍是從 $0 + i0$ 到 $1 + i1$ 。我們用 $\alpha + i\beta$ 來代表這一個線積分的結果，此結果可以看成複數平面上的一個點。若是採用這個觀點，那麼 $\alpha + i\beta$ 與下列複數平面上的四個點之中的那一個最接近 (也就是距離最小)？
- (A) $0 + i0$ (B) $1 + i1$ (C) $1 + i0$ (D) $0 + i1$
- 13 考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)：
- $$y'' - x^2 y' - 3xy = 0; y(0) = 1, y'(0) = -2$$
- 如果我們將解 (solution) 寫成幕級數 (power series) 型式：
- $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
- 那麼，下列選項何者正確？(可以試著套用函數的泰勒級數展開表示法 (Taylor-series expansion))。
- (A) $a_0 = 2$ (B) $a_1 = \frac{1}{3}$ (C) $a_2 = \frac{3}{2}$ (D) $a_3 = \frac{1}{2}$
- 14 假設 $y(x)$ 可以由下列微分方程來描述：
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{2y + 5}$$
- 而且合乎初始條件： $y(1) = -1$ 。請問 $y(0) = ?$
- (A) -2 或 -3 或 5 (B) 2 (C) -4 或 -1 (D) 3 或 4

15 下列選項之中，何者屬於線性（linear）微分方程式？

(A) $y''(t) + t^2 \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot (y(t))^2 = 0$

(B) $y''(t) + 2y'(t) + e^{-t} \cdot y(t) = \sin(2t)$

(C) $y(t) \cdot y''(t) + t^2 \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot y(t) = 0$

(D) $y''(t) + 2t \cdot y'(t) + e^{-t} \cdot y(t) = \sqrt{y(t)}$

16 給定微分方程式 $\frac{dy}{dt} + 2y = t\delta(t-2)$ ，初始值為 $y(0) = 0$ ， $\delta(t)$ 為脈衝函數（impulse function）。則

$y(t)$ 的拉氏轉換（Laplace transform）為何？

(A) $\frac{2}{s+2} e^{-2s}$

(B) $\frac{1}{s^2(s+2)} e^{-2s}$

(C) $\frac{s^2}{s^2(s+2)} e^{-2s}$

(D) $\frac{2s^2}{s^2(s+2)} e^{-2s}$

17 考慮微分方程式 $y'' + 5y' + 6y = x$ ，初始值為 $y(0) = A$ 和 $y'(0) = B$ 。若其解為

$y = \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{6} x + C$ ，則 $A + B + C$ 為下列何值？

(A) 2

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{18}$

(D) $\frac{1}{36}$

18 有兩位桌球選手，根據以往的經驗，在每一局的比賽之中兩人的勝率比例為 6 比 4。如果他們進行一場五戰三勝的比賽（也就是搶先贏得三局的選手為整場比賽的勝利者），那麼請問這場比賽會剛好在打完第四局的時候分出勝負的機率為何？

(A) $\frac{75}{625}$

(B) $\frac{162}{625}$

(C) $\frac{234}{625}$

(D) $\frac{375}{625}$

19 有兩個隨機變數 X 與 Y ，我們以 $P_{XY}(x,y) = \text{Prob}(X=x, Y=y)$ 來代表其合併機率函數（joint probability function），且其值如下所示： $P_{XY}(1,1)=0.07$ 、 $P_{XY}(1,2)=0.09$ 、 $P_{XY}(1,3)=0.12$ 、 $P_{XY}(2,1)=0.25$ 、 $P_{XY}(2,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(2,3)=0.18$ 、 $P_{XY}(3,1)=0.06$ 、 $P_{XY}(3,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(3,3)=0.09$ 。請計算下列條件機率之值： $\text{Prob}(Y=3|X=2) = ?$

(A) 0.25

(B) 0.36

(C) 0.60

(D) 0.84

20 設 X 為一連續隨機變數（random variable），機率密度函數（probability density function）為常態分布（normal distribution），平均值為 45，標準差為 15。若欲將 X 轉換為 Y ，其機率密度函數仍為常態分布，平均值為 65，標準差為 10。則 X 與 Y 的關係式為下列何者？

(A) $Y = \frac{1}{3} X + 50$

(B) $Y = \frac{2}{3} X + 35$

(C) $Y = \frac{2}{5} X + 47$

(D) $Y = X + 20$