

類 科：醫學工程、電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x^2 + x$ ，for $x > 0$ ，的通解（general solution）。（10分）

二、求 $3H(2-t)$ 的拉普拉斯轉換（Laplace transform），其中 $H(t)$ 定義為：

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \text{。 (5分)}$$

三、若 $i^{1+i} = a + ib$ ，求 a 及 b 。（5分）

四、讓 $\mathbf{u} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ 及 $\mathbf{v} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ，其中 $\hat{i}$ 、 $\hat{j}$ 及 $\hat{k}$ 為單位向量，則 $\mathbf{u}$ 向 $\mathbf{v}$ 投影的長度為何？（5分）

五、 x 為一連續隨機變數，其密度函數 f 為 $f(x) = ae^{-x}$ ，其中 a 為一常數， $0 \leq x < \infty$ 。求機率 $P(1 \leq x \leq 2) = ?$ （5分）

$$\text{六、} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(一)求 A 的行列式值（determinant）。（5分）

(二)求 A 所有特徵值（eigenvalues）及其對應之特徵向量（eigenvectors）。（10分）

(三)求 A 的零空間（null space）。（5分）

乙、測驗題部分：（50分）

代號：2374

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為以 $(1,2,2)$ 、 $(0,1,-2)$ 、 $(1,4,1)$ 、 $(2,5,5)$ 為頂點之平行四邊形的面積？

(A) 144

(B) $\sqrt{144}$

(C) $\sqrt{86}$

(D) 86

- 2 設平面 $S_1: x+2y-2z=3$ 、平面 $S_2: 2x+4y-4z=7$ ，則平面 S_1 與平面 S_2 之最短距離為何？
(A) $1/6$ (B) 1 (C) 2 (D) 4
- 3 設 A 為 4×4 的矩陣，若 A 的行列值 $\det(A) = -2$ ，則 $\det(-2A)$ 之值為何？
(A) 4 (B) -4 (C) 32 (D) -32
- 4 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 之反矩陣 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ，求 $a+e+i = ?$
(A) 0 (B) -1 (C) $-\frac{9}{4}$ (D) $\frac{9}{4}$
- 5 若轉換函式 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 可表示為 $T(x, y) = (2x+y, 3x+4y)$ ，則其逆轉換 $T^{-1}(5, 6)$ 為何？
(A) $(14/5, -3/5)$ (B) $(16, 39)$ (C) $(1/16, 1/39)$ (D) $(39, 16)$
- 6 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， D 為對角矩陣且 $D = X^{-1}AX$ ，求方陣 X ：
(A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$
- 7 下列何者是 $1+i$ 的四次方根？
(A) $2^{1/8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right)$ (B) $2^{1/8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$
(C) $2^{1/4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$ (D) $2^{1/4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$
- 8 在複數空間 $z = x + iy$ ，化簡 $\left(\frac{\overline{6-2i}}{1-i} \right)$ ：(其中 $\overline{f(z)}$ 為對複數函數 $f(z)$ 取共軛複數 (complex conjugate) 以及 $i = \sqrt{-1}$ 。)
(A) $4+2i$ (B) $-4+2i$ (C) $4-2i$ (D) $-4-2i$
- 9 求複數積分 $\oint_C \frac{ie^z dz}{(z-1+i)^2} = ?$ (其中積分路徑 C 為 $|z-1|=5$ 之逆時針方向圓周。)
(A) $2\pi e(\cos 1 + i \sin 1)$ (B) $-2\pi e(\cos 1 - i \sin 1)$ (C) $\pi e(\cos 1 + i \sin 1)$ (D) $-\pi e(\cos 1 - \sin 1)$
- 10 下列複數級數何者為發散？(其中 $i = \sqrt{-1}$ 。)
(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} \right)^n$ (D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{(n+1)^2}$
- 11 求解微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 1.25 \frac{dy}{dx} - 0.875y = 0$ ：
(A) $y = c_1 e^{0.5x} + c_2 e^{1.75x}$ (B) $y = c_1 e^{0.5x} + c_2 e^{-1.75x}$ (C) $y = c_1 e^{3.5x} + c_2 e^{0.25x}$ (D) $y = c_1 e^{3.5x} + c_2 e^{-0.25x}$

- 12 $3x^2 + xy^\alpha - x^2 y^{\alpha-1} y' = 0$ 為正合 (exact)，則 $\alpha = ?$
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1
- 13 求微分方程式 $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 7y^{(2)} + 6y^{(1)} + 2y = 0$ 的通解：(其中 $y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dx^n}$ 。)
(A) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 x^3 e^{-x}$ (B) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^x \cos x + c_4 e^x \sin x$
(C) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-x} \cos x + c_4 e^{-x} \sin x$ (D) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 \cosh x + c_4 \sinh x$
- 14 將 Bessel equation $x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \nu^2)y = 0$ (其中 ν 、 k 為常數) 化成 Sturm-Liouville 之形式為 $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + (\lambda \omega(x) + q(x))y = 0$ ，下列何者正確？
(A) $p(x) = x^2$ (B) $p(x) = \frac{x^2}{2} + x$ (C) $p(x) = x$ (D) $p(x) = x^{\frac{1}{2}}$
- 15 利用拉氏轉換求 $\int_0^\infty t \cos(t) e^{-2t} dt = ?$
(A) $\frac{4}{25}$ (B) $\frac{3}{25}$ (C) $\frac{3}{23}$ (D) $\frac{2}{25}$
- 16 下列何者為 $Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 4)}$ 之反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform)？(其中 $u(t)$ 為單位步階函數 (unit step function)。)。
(A) $y(t) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin 2(t-2) \right] u(t-2)$ (B) $y(t) = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin 2(t-2) \right] u(t-2)$
(C) $y(t) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(t-2) \right] u(t-2)$ (D) $y(t) = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2(t-2) \right] u(t-2)$
- 17 一週期函數 $f(x) = 1 + \sin^2 2x$ ，則其傅立葉級數 (Fourier series) 為：
(A) $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin 4x$ (B) $f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x$ (C) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x$ (D) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos 2x$
- 18 若 A、B 是機率不為零且互為獨立的事件，則下列何者不一定成立？
(A) $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ (B) $P[A \cap \bar{B}] = P[A]P[\bar{B}]$
(C) $P[A|B] = P[A|\bar{B}]$ (D) $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
- 19 設 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$ ，則其 C 值為多少？
(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 3/8 (D) 5/8
- 20 假設一隨機變數 X ，其動量產生函數 (moment-generating function) 為 $M_X(t) = e^{(t+2t^2)}$ ；試問此隨機變數 X 的期望值 (mean) 為何？
(A) 0 (B) 0.5 (C) 1 (D) 2