

類 科：經建行政、工業行政、農業行政、交通技術

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

※本試題可能使用之標準常態值如下：

$$z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645, z_{0.1} = 1.28$$

$$t_{0.05}(15) = 1.753, t_{0.025}(15) = 2.131, t_{0.05}(16) = 1.746, t_{0.025}(16) = 2.120$$

一、在農業試驗之某種果樹可能生出既大又酸的水果，也可能生出雖小又甜的水果。若此種果樹長出既大又酸的水果之機率為 p_1 及長出雖小又甜的水果之機率為 p_2 。令 X 為此試驗種出 $n=30$ 棵果樹中長出既大又酸水果之棵數。但已知由 X 估計 p_1 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為 $(0.4, 0.7)$ ，試求：

(一) p_2 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。(15 分)(二) 當顯著水準為 $\alpha \in (0, 1)$ ，但未知時，請檢定 $H_0: p_2 = 0.4$ vs. $H_1: p_2 \neq 0.4$ 。(10 分)

二、中部地區平均每公畝生產 A 水果 5 單位（每單位為 100 公斤）。近年因氣候異常，令人質疑每公畝平均產量是否仍為 5 單位。

(一) 若隨機樣本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 具有常態分配 $N(\mu, 1)$ ，則請推導顯著水準為 α 之概似比 (Likelihood Ratio) 檢定。(15 分)(二) 若顯著水準 $\alpha = 0.05$ 、樣本數 $n = 25$ 且樣本平均 $\bar{x} = 4$ ，則每公畝平均產量是否仍為 5 單位？(10 分)

三、若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為抽自 $N(\mu, \sigma^2)$ 之隨機樣本，且 X_{n+1}, X_{n+2} 為獨立並具有相同分配。盼以 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 來預測 $Y = X_{n+1} + X_{n+2}$ ，則：

(一) 請推導 Y 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。(15 分)(二) 若已知 $n = 16$ ， $s^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{x})^2 = 1.44$ 及 $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i = 2$ ，試求 Y 的 95% 信賴區間。(10 分)

四、假設 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為一組隨機樣本具有如下分配：

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

(一) 請找出 θ 的 Cramer-Rao 下限。(9 分)(二) 請找出 θ 的最大概似估計量 (mle)。(8 分)(三) 請由 mle 之極限分配導出 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。(8 分)