

115年公務人員普通考試試題

類 科：地震測報

科 目：地球物理數學概要

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、在地球物理線性反演（逆推）問題中，觀測數據向量 d 與物理模型向量 m 有下列關係：

$$Gm = d$$

上式 G 稱為核矩陣（kernel matrix），為連結模型與數據之線性數學算子，而 m 為待求的物理模型參數向量。請回答下列問題：

(一)若 $Gm = d$ 為超定問題（over-determined problems），亦即觀測數據 d 的維度大於地下模型 m 的維度，請利用最小平方法（least squares method）推導其估計解 $\hat{m}$ 的矩陣表達式。（15 分）

(二)在實際地球物理反演中，如地震波速層析成像（Tomography）或有限斷層滑移分佈反演(Finite-fault inversion)，核矩陣 G 經常呈現嚴重的病態特徵，為了避免反演時產生估計解的劇烈變動，實務上常引入一平滑矩陣（smoothing matrix） W 以約束相鄰模型參數間的平滑度。請利用廣義阻尼最小平方法（generalized damped least squares method）推導其估計解 $\hat{m}$ 的矩陣表達式。（10 分）

二、若一解析函數（analytic function） $f(x)$ 在 $x = a$ 處展開為泰勒級數（Taylor series），可表示為：

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots$$

上式中之 $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 為該泰勒級數之展開係數。請回答下列問題：

(一)請利用尋求待定係數之思路（推導各階係數 c_n 與函數導數之關係），透過逐項比較的方法，證明其一般項係數如下：（10 分）

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(二)請寫出馬克勞林級數（Maclaurin series）的形式。（5 分）

(三)請推導函數 $f(x) = \ln(1 + x)$ 的馬克勞林級數展開式，並明確寫出其級數的一般項（第 n 項）表達式（不用考慮該級數的收斂區間）。（10 分）

三、考慮地球岩石圈的熱傳導問題，令地層密度為 ρ 、比熱為 c_p 、熱導率 (thermal conductivity) 為 k 。隨深度 z 的一維熱傳導方程式為：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

上式中之 $T(z, t)$ 表示沿 z 方向隨時間 t 之溫度變化。請回答下列問題：

- (一)請利用傅立葉熱傳導定律 (Fourier's Law of Heat Conduction) 與能量守恒原則，推導出此一維熱傳導方程式 (如上式)。(5 分)
- (二)請利用分離變數法 (separation of variables) 求解此一維熱傳導方程式，並寫出其一般解 (general solution) 的通式。(10 分)
- (三)考慮溫度只在垂直方向 (z 方向) 變化，且內部有熱源 A (單位體積之產熱率)，若地熱場達到穩定狀態 (steady-state)，即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ，則其熱導方程式為：

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{A}{k}$$

已知地表 ($z = 0$) 處之溫度與熱流觀測值分別滿足： $T = 0$ 與 $q = -k \frac{dT}{dz} = -q_0$ (地表的熱流值)，請推導出地溫分佈 $T(z)$ 為何？(10 分)

四、地震定位是地震學研究的基本核心問題之一。令某一地震的真實地震定位參數為 $m = [x, y, z, t]^T$ ，其中 (x, y, z) 為震源的三維空間座標， t 是發震時間。現有若干地震測站，而第 i 個測站的座標為 (x_i, y_i, z_i) ，其記錄到 P 波的到時 (arrival time) 為 T_i ，表示如下：

$$T_i(x, y, z, t) = t + \tau_i(x, y, z)$$

τ_i 是震源到第 i 個測站的 P 波走時。請回答下列問題：

- (一)由於到時 T_i 與地震定位參數的關係是非線性問題，若給一初始猜測之震源參數為 $m_0 = [x_0, y_0, z_0, t_0]^T$ ，請利用蓋格法 (Geiger's method) 將之轉換成到時殘差 (ΔT_i) 與地震定位參數修正量 ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$) 的線性方程表達式。(10 分)
- (二)承(一)，將若干個測站的到時殘差與地震定位參數修正量線性方程組改寫成矩陣形式，表示為 $G \Delta m = d$ ，其中 G 稱為核矩陣 (kernel matrix)， $\Delta m = [\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t]^T$ 為地震定位參數修正量向量， d 為各測站的到時殘差向量。若 G 為病態矩陣 (ill-conditioned matrix)，請利用阻尼最小平方法 (damped least squares method) 推導其估計解 $\hat{\Delta m}$ 的矩陣表達式。(15 分)