

類 科：經建行政、交通技術

科 目：統計學概要

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、假定中部山區每天的雨量為隨機變數 X ，其母體平均 $E(X) = \theta_1$ 及變異數 $\text{Var}(X) = \theta_2 e^{\theta_1}$ 。(一)如果我們有一組隨機樣本 $X_1, \dots, X_n$ ，請用動差法找出 θ_1 及 θ_2 之估計量。(15 分)(二)如果 $n = 25$ ， $\sum_{i=1}^{25} X_i = 25$ ， $\sum_{i=1}^{25} X_i^2 = 50$ ，請算出 θ_1 及 θ_2 的估計值。(10 分)二、 $H_0: \theta \in \{-1, 0\}$ vs $H_1: \theta \in \{1, 2\}$ 。現有三個棄卻區域 C_1 、 C_2 與 C_3 ，其檢定力(power)函數分別表示如下：

$$\pi_{C_1}(-1) = 0.03, \quad \pi_{C_1}(0) = 0.05, \quad \pi_{C_1}(1) = 0.15, \quad \pi_{C_1}(2) = 0.6$$

$$\pi_{C_2}(-1) = 0.03, \quad \pi_{C_2}(0) = 0.04, \quad \pi_{C_2}(1) = 0.3, \quad \pi_{C_2}(2) = 0.7$$

$$\pi_{C_3}(-1) = 0.02, \quad \pi_{C_3}(0) = 0.06, \quad \pi_{C_3}(1) = 0.4, \quad \pi_{C_3}(2) = 0.6$$

(一)若每個棄卻區域可算出 H_1 為真時第二種錯誤機率的最大值，則請問那個棄卻區域具有最小的第二種錯誤機率最大值。(13 分)

(二)若顯著水準為0.05，則請問最好的棄卻區域為何？為什麼？(12 分)

三、某種植物依其開花種類分為紅花與黃花兩種。據植物學理論，此植物開紅花者與開黃花者配對後，開紅花的機率為0.75。現有5株經過此配對後的植物，則：

(一)請問至少有一株植物開黃花的機率為何？(10 分)

(二)假定植物開黃花的機率為 P_y ，開紅花的機率為 P_x ，其中 P_x 與 P_y 皆未知。當配對株數為 $n = 30$ 時，請問 P_x 與 P_y 的 $100(1-\alpha)\%$ （近似）信賴區間各為何？請問兩個信賴區間的長度是否相等？(15 分)四、隨機變數 F 為 $f(r_1, r_2)$ 之分配，且 $f_\alpha(r_1, r_2)$ 滿足 $P(F \leq f_\alpha(r_1, r_2)) = \alpha$ 。統計學之機率表經常只能查 $f_\alpha(r_1, r_2) \quad \forall \alpha > 0.5$ ，請推導並證明如何算出 $\alpha < 0.5$ 時的 $f_\alpha(r_1, r_2)$ 。(15 分)五、某電子產品之厚度為重要品質特徵。現該產品有兩條生產線。遂從兩條生產線各抽取一組隨機樣本 $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 及 $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ ，以檢定 $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs $H_1: \sigma_x^2 < \sigma_y^2$ ，並令 $F = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。若 F 之觀察值為 F_0 且滿足 $P(F < F_0; \sigma_x^2 = \sigma_y^2) < 0.95$ ，請問當 $\alpha = 0.05$ 時檢定的結論為何？為什麼？(10 分)