

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、令 quadratic form $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 10$ ，其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，

(一) Q 為那一種圓錐曲線？(2 分)

(二)求 Q 的正交主軸轉換矩陣(Orthogonal Principal Axes Transformation Matrix)。(8 分)

二、求解 $y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 8e^{2x}$; $y(0) = 1, y'(0) = 4$ ，其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$ 。(15 分)

三、求 $1+i$ 的四次方根。(10 分)

四、兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數(joint probability density function)為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2cx, & 0 \leq x \leq 2, |y| \leq x^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 求}$$

(一) $c = ?$ (5 分)

(二) X 之邊際機率密度函數(Marginal probability density function) $f_X(x) = ?$ (5 分)

(三) Y 之邊際機率密度函數(Marginal probability density function) $f_Y(y) = ?$ (5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6308

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 假設 $z(x,y) = 3000 - x^2 - 9y^2$ 是一座山距離海平面的高度，試問在點 $P(4, 1)$ 的位置，往那一個方向具有最陡峭的高度變化？

(A) $[-1, -2.25]$

(B) $[-1, 2.25]$

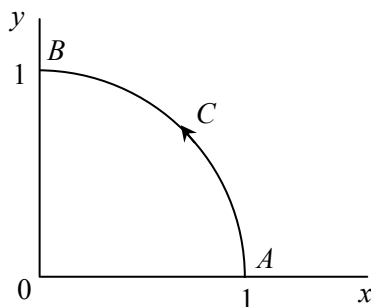
(C) $[-8, 18]$

(D) $[8, 18]$

2 若 F, G, H 為向量， α 為純量，有關外積（Cross Product）的性質，何者錯誤？

- (A) $F \times G = G \times F$ (B) $F \times G$ 與 G, F 均正交（Orthogonal）
(C) $F \times (G + H) = F \times G + F \times H$ (D) $\alpha (G \times H) = (\alpha G) \times H$

3 $F = [-y, -xy]$ ， C 為下圖所示從 A 至 B 的圓弧，其線積分 $\int_C F \cdot dr = \frac{\pi}{a} + \frac{1}{b}$ ，則下列何者屬實？



- (A) $a + b = 1$ (B) $a + b = 7$
(C) $a + b = -1$ (D) $a + b = -7$

4 若 $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ ，計算 $\nabla \cdot \vec{F}$ 與 $\nabla \times \vec{F}$ 各為何？

- (A) $\nabla \cdot \vec{F} = 8, \nabla \times \vec{F} = \vec{k}$ (B) $\nabla \cdot \vec{F} = 8, \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
(C) $\nabla \cdot \vec{F} = 3, \nabla \times \vec{F} = \vec{k}$ (D) $\nabla \cdot \vec{F} = 3, \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

5 對於矩陣特徵問題 $AX = \lambda X$ ，得到特徵值 λ 為實數的充分條件為何？

- (A) A 是對稱（symmetric）矩陣 (B) A 是正交（orthogonal）矩陣
(C) A 是 Hermitian 矩陣 (D) A 是 Skew-Hermitian 矩陣

6 令 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ 及 $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$ ，求跡數（trace） $\text{tr}(AB) = ?$

- (A) 290 (B) 284
(C) 280 (D) 286

7 下列何者 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 為線性轉換函式？

- (A) $T(x, y) = (x + y, 3y)$ (B) $T(x, y) = (2x - 1, 3y + 1)$
(C) $T(x, y) = (x^2, 3y + 2)$ (D) $T(x, y) = (2, 3)$

- 8 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ，則 $A^3 - 8A^2 + 15A$ 為何？
 (A) 0 (B) A (C) $3A$ (D) $5A$
- 9 下列選項何者為 $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ 的一解？（註： $i = \sqrt{-1}$ ）
 (A) $z = 1 + i(1/3)\pi$ (B) $z = 1 + i(1/6)\pi$
 (C) $z = \ln(2) + i(4/3)\pi$ (D) $z = \ln(2) + i(7/3)\pi$
- 10 令 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 為一複數冪級數（complex power series），且已知其在 $z = 3 + 4i$ 時為收斂，則下列敘述何者為正確？（註： $i = \sqrt{-1}$ ）
 (A) 對所有實部小於 3 的複數 z ，此複數冪級數為收斂
 (B) 對所有虛部小於 4 的複數 z ，此複數冪級數為收斂
 (C) 對所有 $|z| < 5$ 的複數 z ，此複數冪級數為收斂
 (D) 對所有 $|z| \leq 5$ 的複數 z ，此複數冪級數為收斂
- 11 求 $\frac{x-2}{x^2+4x+5}$ 對中心點 $x_0 = -2$ 的泰勒展開級數（Taylor expansion series）的收斂半徑？
 (A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) ∞
- 12 $x^2 y' + y^2 = xy$ ，則 $y = ?$
 (A) $\frac{x}{\ln x} + C$ (B) $\frac{\ln x}{x} + C$
 (C) $\frac{\ln x + C}{x}$ (D) $\frac{x}{\ln x + C}$
- 13 求解 $\frac{dy}{dx} = 6e^{3x}y^2$ ， $y(0) = 1$
 (A) $y = \frac{-1}{2 - 3e^{3x}}$ (B) $y = \frac{1}{3 - 2e^{3x}}$
 (C) $y = \frac{1}{3 - 2e^{2x}}$ (D) $y = \frac{-1}{2 - 3e^{2x}}$
- 14 若函數 $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2w}{w}$ 為 $f(t)$ 之傅立葉轉換，下列何者正確？
 (A) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{當 } -2 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (B) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{當 } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
 (C) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{當 } 0 < x < 2 \\ -1, & \text{其他} \end{cases}$ (D) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{當 } -2 < x < 2 \\ -1, & \text{其他} \end{cases}$

15 定義 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ，極座標轉換 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，則下列何者正確？

(A) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

(B) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

(C) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

(D) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

16 下列何者不可能是 $x^2 y'' + Axy' + By = 0$ 的解？其中 A 和 B 為常數。

(A) $x^2 \cos(3 \ln(x))$

(B) $x^3 \ln(2x)$

(C) $e^2 + x$

(D) e^{2x}

17 下列何者之拉普拉斯轉換（Laplace transform）不存在？

(A) e^{3t}

(B) $\frac{1}{t}$

(C) e^{88}

(D) $\cos t$

18 假設 X 為連續型隨機變數，具有機率密度函數（probability density function） $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$ ，

試求 $Y = 8X^3$ 在 $0 < y < 8$ 之機率密度函數 $f_Y(y)$ 為何？

(A) $\frac{1}{8} y^{-1/4}$

(B) $\frac{1}{6} y^{-1/3}$

(C) $\frac{1}{4} y^{-1/2}$

(D) $\frac{1}{2} y^{-1}$

19 有 200 位成人中其性別和教育程度的情形如下：

教育程度	男性	女性
國小	38	45
中學	28	50
大學	22	17

假設從這 200 位成人中隨機挑選 1 人，已知此人是女性，請問此人沒有大學教育程度的機率為何？

(A) 17/200

(B) 17/112

(C) 95/112

(D) 95/200

20 假設兩個隨機變數 X 和 Y 的結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{當 } 0 < x < 1, 0 < y < 1, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{試問 } P(X \geq 0.5) = ?$$

(A) 5/16

(B) 3/5

(C) 2/3

(D) 1/8