

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

下列各個題目必須詳列解題的過程。

一、請用 Laplace 轉換求下列問題的解。（30 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

二、已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 。

(一)找一個正交矩陣 P 和一個對角矩陣 D ，滿足 $P^T A P = D$ 。（15 分）(二)請驗證 $P^T A P = D$ 。（5 分）三、已知問題 $y'' - 2xy' + 10y = 0$ 和 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 。

求這個問題的解。（25 分）

四、以下列問題為例，證明 Stokes 的定理。其中向量函數為 $V = z^2 \vec{i} + 2x \vec{j} + y^3 \vec{k}$ 作用在單位球的上半球 S 上，其中單位球為 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。（15 分）五、求 $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = ?$ （10 分）