

115年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、
國家安全局國家安全情報人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員考試

等別：三等考試

類科組別：數理組（選試英文）

科目：線性代數

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、以下的聯立方程式包含四個未知數三個方程式，(一)請將聯立方程式表示成矩陣方程式的形式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ， $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ，求 $\mathbf{A} = ?$ $\mathbf{b} = ?$ (5分)

(二)求出此聯立方程式的通解， $\mathbf{x} = ?$ (10分)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +7x_4 & = & 1 \end{array}$$

二、考慮函數 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是一個線性轉換 $T(x_1, x_2) = x_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，

求 x_1, x_2 使得 $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。(10分)

三、假設 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ，求 $\mathbf{A}$ 的反矩陣。(10分)

四、如果 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -8 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ，(一)求 $\mathbf{A}$ 的行空間 (Column space of $\mathbf{A}$) 的基底；(7分) (二)求 $\mathbf{A}$ 的零空間 (Null space of $\mathbf{A}$) 的基底。(8分)

五、假設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ，求 A 的行列式值。(10 分)

六、在 $\mathbb{R}^4$ 空間中有 $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)^T$ ， $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 1, -2)^T$ ， $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1, 1)^T$ ， $\mathbf{y} = (4, 3, 3, -1)^T$ ，且 $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 代表由此三正交向量組成的空間，
(一)求將向量 $\mathbf{y}$ 正交投影 (orthogonal projection) 至 $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 的向量；(10 分) (二)求向量 $\mathbf{y}$ 離向量空間 $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 的最短距離。(5 分)

七、如果 $\{\mathbf{x}_1 = (1, -4, 0, 1)^T, \mathbf{x}_2 = (7, -7, -4, 1)^T\}$ 是子空間 W 的基底， $W \subset \mathbb{R}^4$ ，請使用 Gram-Schmidt 正交處理技術求出子空間 W 的正交歸一基底 (orthonormal basis)。(10 分)

八、假設 $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ，(一)求出矩陣 A 的特徵值 (eigenvalues)，(6 分)

(二)求出每個特徵值對應的特徵空間 (eigenspaces)。(9 分)