

類 科：地震測報

科 目：地球物理數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、已知一複數冪次級數 (complex power series) 如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n} \right)^n (z+i)^n$$

(一)求此級數之中心 (center of the series)。(5 分)

(二)求此級數之收斂區間 (region of convergence)。(10 分)

二、若 $\phi(x, y, z) = xy^2 + z$ ，則在方向 $\vec{D} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ 上之點 $(-2, 1, 3)$ ， ϕ 的梯度為何？
(15 分)

三、求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ 之極值 (limit)。(15 分)

四、已知 $z_1 = 1-i$ ， $z_2 = -2+4i$ ， $z_3 = \sqrt{3}-2i$ ，求 $\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} \right|$ 。(15 分)

五、令 $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ ， $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ， $\vec{C} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ，求：

(一) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ 。(10 分)(二) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ 。(10 分)

六、一球座標之偏微分方程式如下：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

而球座標之 Laplacian 為：

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

(一)請問此球座標偏微分方程是什麼方程式？(寫出名稱即可，例如 Laplace's equation, Poisson's equation, ...) (10 分)

(二)寫出卡氏座標 (Cartesian coordinates) 之 Laplacian。(10 分)