

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求 $yy'' = (y')^2$ 的通解 (general solution)。(15分)

二、求 $\int_c \bar{z} dz$ ，其中 c 代表複數平面上逆時針方向繞一圈的單位圓(圓點為圓心且半徑為1的圓)。(10分)

三、求平面 $2x - y + 2z = 1$ 與平面 $x - y = 2$ 之夾角 θ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$)。(10分)

四、 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，求特徵值 (eigenvalues) 與其對應的特徵向量 (eigenvectors)。(15分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：2373

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 二階微分方程 $y'' - y' - 12y = 2\sinh^2(x)$ ，初始值未知，試問其全解(通解加特解)為何？

(A) $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}(1 - e^{-2x}) - \frac{1}{12}e^{2x}$ (B) $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{12}(1 - e^{-2x}) - \frac{1}{20}e^{2x}$

(C) $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + (\frac{1}{12} - \frac{1}{10}e^{-2x}) - \frac{1}{6}e^{2x}$ (D) $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{20}e^{2x}$

2 二階微分方程 $3y'' + 12y = 2\tan(2x)$ ，試問其特解為何？

(A) $-\frac{1}{6}\sin(2x) \cdot \ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$ (B) $-\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot \ln|\csc(2x) + \cot(2x)|$

(C) $-\frac{1}{6}\cos(2x) \cdot \ln|\csc(2x) + \tan(2x)|$ (D) $-\frac{1}{6}\cos(2x) \cdot \ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$

3 函數 $f(t) = te^{-2t}\sin\omega t$ ，請問其經過拉式轉換 (Laplace Transform) 後為下列何者？

(A) $F(s) = \frac{2(S+2)\omega}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$ (B) $F(s) = \frac{2(S+2)}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$

(C) $F(s) = \frac{(S+2)}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$ (D) $F(s) = \frac{-2(S+2)\omega}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$

4 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, 試問 $A^{-1} = ?$, $B^{-1} = ?$

(A) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3.5 & 1 & -1.5 \\ 5.5 & -1 & 1 \\ 3.5 & -1 & -0.5 \end{bmatrix}$

(B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & -0.5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$

(C) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & 1.5 \\ 3.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$

(D) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & 1.5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5 若 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$, 且 $f(x) = f(x+2)$ 。若 $f(x)$ 之傅立葉級數 (Fourier Series) 為

$f(x) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \pi kx + b_k \sin \pi kx)$, 下列何者為非?

(A) $a_0 = \frac{1}{4}$

(B) $a_1 = -\frac{2}{\pi^2}$

(C) $a_2 = -\frac{1}{2\pi^2}$

(D) $a_3 = -\frac{2}{9\pi^2}$

6 一組聯立方程式以 $A\bar{x} = B$ 的方式表示如下:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & T^2 - 11 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T - 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

其中 T 為常數, 若上式之增廣矩陣 (augmented matrix) 為 C , 又此一聯立方程式已知有無限多組解, 試問 $\text{rank}(C)$ 之最大值為何? T 又為何?

(A) $\text{rank}(C)$ 之最大值為 3, $T = -3$

(B) $\text{rank}(C)$ 之最大值為 4, $T = 3$

(C) $\text{rank}(C)$ 之最大值為 2, $T = -4$

(D) $\text{rank}(C)$ 之最大值為 2, $T = 3$

7 兩向量分別為 $\vec{H}(t) = 2\hat{i} + 8t\hat{j} + t^2\hat{k}$, $\vec{G}(t) = -3t\hat{i} + 2e^t\hat{j} + \ln(t)\hat{k}$, 請求出 $\frac{d}{dt}[\vec{H}(t) \times \vec{G}(t)] = ?$ (其中 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 為三度空間 R^3 各座標軸之單位向量符號, 亦即 $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$)

(A) $\left[8(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t \right] \hat{i} - (9t^2 + \frac{2}{t}) \hat{j} + (48t + 4e^t) \hat{k}$

(B) $\left[(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t \right] \hat{i} + (-9t^2 + \frac{2}{t}) \hat{j} + (48t + 4e^t) \hat{k}$

(C) $\left[8(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t \right] \hat{i} + (-9t^2 + \frac{2}{t}) \hat{j} + (24t + 2e^t) \hat{k}$

(D) $\left[8(1 - \ln t) - (2t^2 - 4t)e^t \right] \hat{i} - (9t^2 + \frac{2}{t}) \hat{j} + (48t - 4e^t) \hat{k}$

- 8 一曲線參數式為 $\mathbf{x}(t) = e^t \cos t$, $\mathbf{y}(t) = e^t \sin t$, $\mathbf{z}(t) = e^t$, $0 \leq t \leq \pi$, 其單位切線向量為何？（其中 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 為三度空間 $\mathbb{R}^3$ 之單位向量 , $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$ ）。
 (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t \hat{k}$
 (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t)\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$
 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$
 (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t \hat{k}$
- 9 利用梯度求解曲面 $\varphi : xy^3z^2 = 4$ 在 $(-1, -1, 2)$ 點之法向量的過程與結果 , 以下何者錯誤？（其中 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 為三度空間 $\mathbb{R}^3$ 之單位向量 , $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$ ）。
 (A) $\nabla\varphi = y^3z^2\hat{i} + 3xy^2z^2\hat{j} + 2xy^3z\hat{k}$
 (B) 曲面 φ 在點 $(-1, -1, 2)$ 上之法向量為 $-4\hat{i} - 12\hat{j} + 4\hat{k}$
 (C) 曲面 φ 在點 $(-1, -1, 2)$ 之單位法向量為 $\pm \frac{1}{\sqrt{11}}(-1\hat{i} - 3\hat{j} + 1\hat{k})$
 (D) $8\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ 為曲面 φ 在點 $(-1, -1, 2)$ 之法向量
- 10 某大學111學年度第二學期工程數學某班共有男生6人 , 女生5人 , 期中考試成績如下：
 男生：88, 77, 40, 58, 72, 92
 女生：84, 60, 74, 50, 95
 試求以男、女生做為區分條件時之標準差（standard deviation）各為何？（請選數值最接近者）
 (A) 男生：16.95；女生：15.78 (B) 男生：17.78；女生：16.14
 (C) 男生：17.78；女生：15.78 (D) 男生：16.95；女生：16.14
- 11 請利用柯西—里曼方程式（Cauchy-Riemann Equation）驗證下列何者非可解析函數（non-analytic function）？（其中 z 為複數）
 (A) $f(z) = |z|$ (B) $f(z) = \sin z$ (C) $f(z) = z^2 + 2z - 1$ (D) $f(z) = e^z$
- 12 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 試問行列式 $\det(AB) = ?$
 (A) 0 (B) 576 (C) 22 (D) 121

13 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，求 $(1+i)^{12}$ 的運算結果為何？

- (A)-64 (B)-128 (C)-512 (D)-256

14 函數 $f(t)$ 經拉式轉換後為 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{S-1}{(S+3)(S^2+2S+2)}$ ，試問 $f(t)$ 應為？

- (A) $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t)$ (B) $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^t(\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t)$
(C) $\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{4}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t)$ (D) $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^t(\frac{4}{5}\sin t - \frac{3}{5}\cos t)$

15 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 且 $B = A^{-1}$ ，請問行列式 $\det(B^2)$ 為下列何者？

- (A) 1/900 (B) 1/700 (C) 1/500 (D) 1/300

16 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 具有特徵向量 $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，請問下列何者可為其對角化 (Diagonalization) 矩陣？

- (A) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

17 方程式 $e^x y' = 2(x+1)y^2$ ， $y(0) = 1/6$ 之解為下列何者？

- (A) $y = \frac{1}{(2x+4)e^{-x}+2}$ (B) $y = \frac{-1}{(2x-4)e^{-x}-2}$ (C) $y = \frac{1}{(-2x+4)e^{-x}+2}$ (D) $y = \frac{1}{(2x+4)e^x+2}$

18 求 $\frac{1}{s^2}(\frac{s-1}{s+1})$ 之反拉式轉換 (Inverse Laplace Transform) 為下列何者？

- (A) $-2e^{-t} + t + 2$ (B) $-2e^{-t} - t + 2$ (C) $-2e^{-t} + t - 2$ (D) $-2e^{-t} - t - 2$

19 求 $\cosh(at)\cos(at)$ 之拉式轉換為下列何者？(其中 a 為實數)

- (A) $\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$ (B) $\frac{2a^2 + s^2}{s^4 + 4a^4}$ (C) $\frac{s^2 - 2a^2}{s^4 + 4a^4}$ (D) $\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$

20 已知 $f(t) = \frac{\sin 8t}{t}$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j5t} dt$ 之值為下列何者？($j = \sqrt{-1}$)

- (A) $j\pi$ (B) $j\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π