

105年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60930

全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：數論

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、試解同餘方程組：(20 分)

$$2x \equiv 1(\text{mod } 3),$$

$$3x \equiv 3(\text{mod } 5),$$

$$4x \equiv 4(\text{mod } 8)。$$

二、試證明：沒有正整數 x, y 滿足方程式： $5^x + 2 = 17^y$ 。(20 分)

三、試證明：形如 $4m+3$ 的質數有無窮多個。(20 分)

四、試證明：

(一)如果正整數 m 使得 $2^m + 1$ 是質數，必有正整數 n 使得 $m = 2^n$ 。(10 分)

(二)如果正整數 $a^p - 1$ 是質數，則 $a = 2$ 且 p 是質數。(10 分)

五、令 Euler 函數 $\varphi(n)$ 表示不超過正整數 n 且與 n 互質的正整數的個數，例如 $\varphi(6) = 2$ ， $\varphi(12) = 4$ 。試證明：

(一)對於任何具有最大公因數 $d = (m, n)$ 的正整數 m 和 n ，我們有 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$ 。
(10 分)

(二)如果正整數 a 整除正整數 b ，則 $\varphi(a)$ 整除 $\varphi(b)$ 。(10 分)