

105年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60960

全一張
(正面)

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、設齊次線性方程組 (homogeneous linear system)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + \quad \quad \quad 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\-2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 - 8x_5 &= 0 \\-3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

(一)利用此線性方程組的增廣矩陣 (augmented matrix)，以高斯喬登消去法 (Gauss Jordan elimination method) 簡化至簡列梯形形式 (reduced row-echelon form)，求此線性方程組的一般解集合空間 (solution space)。(15 分)

(二)求此解集合空間的一組基底及維度 (dimension)。(5 分)

二、設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(一)求矩陣 P 使得 $P^{-1}AP$ 為對角矩陣，並寫出此對角矩陣。(10 分)

(二)利用(一)，以相似變換方法 (similarity transformation method) 求矩陣 A^{11} 。(10 分)

三、令 $T: P_2 \rightarrow R_3$ 為一函數，其定義為

$$T(p(x)) = (p(0), p(2), p(1))$$

(一)證明 T 是線性變換函數 (linear transformation)。(5 分)

(二)證明 T 是一對一函數 (one-to-one)。(5 分)

(三)試求 $T^{-1}(1, 2, 3)$ ？(5 分)

(四)試求 $T(1-2x)$ ？(5 分)

(請接背面)

105年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60960

全一張
(背面)

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

四、設線性方程組如下：

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(一)試求最小平方解 (least squares solution)。(10 分)

(二)試求 b 在 A 行空間 (column space) 的正交投影向量 (orthogonal projection)。(5 分)

(三)試求最小平方誤差值 (least squares error) $\|b - Ax\|$ 。(5 分)

五、令向量空間 $\mathbb{R}^3$ 具有如下內積 (inner product)

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ 為空間 $\mathbb{R}^3$ 之任意兩向量。

(一)證明 $x = (1, 1, 0)$, $y = (1, 0, 1)$, and $z = (0, 1, 1)$ 為 $\mathbb{R}^3$ 一組基底。(10 分)

(二)使用格拉姆-施密特正交化法 (Gram-Schmidt orthogonalization) 轉換 x, y, z 為標準正交基底 (orthonormal basis)。(10 分)