

102年公務人員特種考試警察人員考試、
102年公務人員特種考試一般警察人員考試及
102年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

等 別：高員三級鐵路人員考試

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉氏轉換（Laplace Transform）解聯立微分方程式：（10 分）

$$\begin{cases} y_1'' = -ky_1 + k(y_2 - y_1), \\ y_2'' = -k(y_2 - y_1) - ky_2; \end{cases} y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_1'(0) = \sqrt{3k}, y_2'(0) = -\sqrt{3k}.$$

二、令 Σ 是圓錐 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $x^2 + y^2 \leq 9$ 的表面，若 n 為 Σ 之單位法向量且

$$F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}。求 \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} d\sigma。 (15 分)$$

三、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ ，

(一)求 A 的特徵值（eigenvalues）。（5 分）

(二)求 A 的特徵向量（eigenvectors）。（10 分）

四、若隨機變數（random variable） X 與 Y 的聯合機率密度函數（joint probability

$$\text{density function）為 } f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/ab, & 0 < x < a \text{ and } 0 < y < b \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

其中 $a < b$ 。

求：(一) $X + Y \leq 3a/4$ 的機率： $P\{X + Y \leq 3a/4\}$ 。（5 分）

(二) $Y \leq 2bX/a$ 的機率： $P\{Y \leq 2bX/a\}$ 。（5 分）

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6708

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 一系統由 4 項獨立 (independent) 運作之組件構成，其組件正常運作之機率分別為 0.9，0.7，0.5 及 0.3，令隨機變數 X 為該系統中正常運作組件之數量，試求期望值 $E(X)$ = ?

(A) 0.6 (B) 1.2 (C) 2.4 (D) 3.6

- 2 設一隨機變數 X ，其期望值 (mean value) $\mu_X = 8$ ，變異數 (variance) $\sigma_X^2 = 9$ ；試問機率 $P(-4 < X < 20)$ 之值可能為何？

0.3 0.5 0.75 0.95

- 3 $\ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ， $|z| < 1$ ，則 a_1 = ?

-1 0 1 2

- 4 請計算 $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^{11} - 3i}{z^3 + 2i}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：

(A) -4 (B) 11 (C) -6 (D) 0

- 5 設 $\Gamma(t) = t + it$ ， $0 \leq t \leq 1$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\int_{\Gamma} z^2 dz$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}(1+i)$ (C) $\frac{1}{3}(1-i)$ (D) $-\frac{2}{3}(1-i)$

- 6 已知複變數函數 $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ 的奇異點 (singular point) 是為一個極點 (pole)，試決定此極點的階數 (order) M 及對應的留數 (residue) B 分別為何？

(A) $M = 1$ ， $B = \frac{-1}{2}$ (B) $M = 1$ ， $B = \frac{1}{2}$ (C) $M = 2$ ， $B = \frac{-1}{2}$ (D) $M = 2$ ， $B = \frac{1}{2}$

- 7 設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為任二 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者錯誤？(答案選項中 $\det \mathbf{X}$ 表矩陣 $\mathbf{X}$ 的行列式值)

(A) $\det k\mathbf{A} = k \det \mathbf{A}$ (其中 k 為一常數) (B) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

(C) $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ (D) 若 $\det \mathbf{A} \neq 0$ ，則 $\mathbf{A}^{-1}$ 必存在

- 8 請問以下何者是 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{999}$ 的特徵值？其中 $i = \sqrt{-1}$ ：
- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $-i$
- 9 若 S 為 $[2 \ 0 \ 0]$, $[0 \ 3 \ 1]$ 所生成之子空間，求向量 $w = [1 \ 1 \ 3]$ 在 S 上之正交投影：
- (A) $[2 \ 18/\sqrt{10} \ 6/\sqrt{10}]$ (B) $[1 \ 9/5 \ 3/5]$
(C) $[2 \ 9/\sqrt{10} \ 3/\sqrt{10}]$ (D) $[2 \ 9/\sqrt{5} \ 3/\sqrt{5}]$
- 10 令 $\mathbf{x} = [1 \ 3 \ 2]^T$ 、 $\mathbf{y}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ 、 $\mathbf{y}_2 = [1 \ -1 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{y}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 且定義 L 為 R^3 至 R^3 相對於基底 (basis) $[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3]$ 之線性轉換 (linear transformation)： $L(\sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{y}_i) = (2c_1 + c_3)\mathbf{y}_1 - (2c_2 + c_3)\mathbf{y}_2 + (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{y}_3$ ，則 $L(\mathbf{x}) = ?$
- (A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- 11 $\int_{-1}^2 \int_0^{2x} \int_y^x dz dy dx$ 為何？
- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 6
- 12 有一曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ，求經過點 $(1, 1, 1)$ 且切於該曲面之平面方程式：
- (A) $2x - y + z = 2$ (B) $x - y + z = 1$ (C) $x + y + z = 3$ (D) $x + y - z = 1$
- 13 若 $\varphi(x, y, z) = \sin(xy) - \cos(yz) + x^2 yz^3$ ，則其在點 $P = (-\pi, 0, \pi)$ 最陡變化方向 (gradient) 的旋度 (curl) 為何？
- (A) $\pi^5 \mathbf{i} - \mathbf{j} + \pi^4 \mathbf{k}$ (B) $\pi^5 \mathbf{i} + \mathbf{j} - \pi^4 \mathbf{k}$ (C) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (D) 0
- 14 若將三維空間中之曲線 C 以參數表示法表示為 $x = 2 \cos(t)$ ， $y = 2 \sin(t)$ ， $z = t$ ；且 $0 \leq t \leq \pi$ ，則曲線 C 之長度為：
- (A) $\frac{\sqrt{5}}{2} \pi^2$ (B) $\frac{3}{2} \pi^2$ (C) $\sqrt{5} \pi$ (D) 3π

15 求解微分方程式 $xy' = \frac{y^2}{2} + y$ ，則其解為何？

(A) $y = \frac{x}{c-x}$

(B) $y = \frac{x}{2(c-x)}$

(C) $y = \frac{2x}{c-x}$

(D) $y = \frac{2}{c-x}$

16 下列何者為 $x^3 dx + (y+1)^2 dy = 0$ 之解？（答案選項中之 c 為任意常數。）

(A) $3x^3 + 4(y+1) = c$

(B) $3x^4 + 4(y+1) = c$

(C) $3x^3 + 4(y+1)^3 = c$

(D) $3x^4 + 4(y+1)^3 = c$

17 下列何者不為 $y'' - y' - 2y = 0$ 之解？

(A) $y = e^{-x} + e^{2x}$

(B) $y = e^{-x}$

(C) $y = e^{2x}$

(D) $y = e^x + e^{2x}$

18 下列何者是 $f(t) = 3t - 5\sin 2t$ 的拉氏轉換（Laplace Transform）？

(A) $\frac{3s^2 - 5s + 12}{s(s^2 + 4)}$

(B) $\frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)}$

(C) $\frac{-5s^3 + 3s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)}$

(D) $\frac{-2s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)}$

19 下列何者錯誤？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數， $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 為拉氏轉換（Laplace Transform）

(A) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

(B) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \rightarrow s-a}$

(C) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$

(D) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2\pi s}}{s^2 + 1}\right\} = \sin(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$

20 設 $\mathbf{A}$ 為一 $n \times n$ 矩陣，且已知 $\mathbf{A}$ 的反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^{-1} = n$

(B) $\det \mathbf{A} \neq 0$ 且 $\det \mathbf{A}^{-1} \neq 0$ （其中 $\det \mathbf{A}$ 表矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列式值）

(C) $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$

(D) 可能存在另一 $n \times n$ 矩陣 $\mathbf{B}$ ，且 $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}^{-1}$ ，使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ （其中 $\mathbf{I}$ 為單位矩陣(identity matrix)）