

106年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60930

全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組（選試英文）

科目：數論

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、如果 $p, p+2$ 兩個數都為質數，我們稱 $(p, p+2)$ 為一對孿生質數。試證明 $(p, p+2)$ 為一對孿生質數的充分必要條件為 $4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$ 。(20 分)

二、 $\varphi(n)$ 代表尤拉 Phi-函數 (Euler Phi-function)。試證明：

(一)對任意正整數 n ， $\varphi(n)$ 必整除 $n!$ 。(15 分)

(二)若正整數 n 為奇數， n 必整除 $2^{n!}-1$ 。(5 分)

三、(一)證明 2 為 $\text{mod } 13$ 的原根 (Primitive root)。(5 分)

(二)試求 $4x^9 \equiv 7 \pmod{13}$ 的整數解。(15 分)

四、設 p 為一奇質數。試證明同餘方程式 $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 必有一組整數解 (x_0, y_0) 滿足 $0 \leq x_0 \leq \frac{p-1}{2}$ 且 $0 \leq y_0 \leq \frac{p-1}{2}$ 。(20 分)

五、數列 $\{a_n\}$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$ ；稱為費波那契數列 (Fibonacci sequence)。

1843 年法國數學家比內 (J-P-M. Binet) 發現 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ 。假設

$p \geq 7$ 為一滿足 $p \equiv 2 \pmod{5}$ 的質數，試證明若 $2p-1$ 也是質數，則 $2p-1$ 必整除 a_p 。(20 分)